PENTRU CERCURILE DE ELEVI

ASUPRA PROBLEMEI 27422 ŞI A ALTOR MATERIALE CONEXE[1)]

Mihail Bălună[2)]

În articolul „O legătură între câteva probleme cu inegalităţi“ din G.M.-B nr. 6-7-8/2018, care extinde câteva inegalităţi publicate recent, se propune demonstrarea relaţiei:

Dacă $a, b, c > 0$ *şi* $n \geq 0$, *atunci*

$$\frac{(na+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(nb+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{(nc+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2} \leq \frac{(n+2)^2}{2}. \tag{1}$$

Această relaţie, pentru $n = 3$, face obiectul problemei 27422 din G.M.-B nr. 9/2017. Din păcate, atât rezolvarea problemei 27422, apărută în G.M.-B

1) Mulţumim domnului *Titu Zvonaru* pentru semnalarea erorilor.

2) Profesor, Colegiul Naţional „Mihai Viteazul”, Bucureşti

nr. 3/2018, cât şi demonstraţia relaţiei (1), conţin o eroare de raţionament de genul

$$a \in \mathbb{R} \text{ şi } 0 < b \leq c \Rightarrow \frac{a}{b} \geq \frac{a}{c},$$

implicaţie care este falsă pentru $a < 0$.

Nici completarea rezolvării problemei 27422, publicată în GM-B nr. 4/2018, nu îndreaptă lucrurile, deoarece ea se bazează pe afirmaţia eronată „*dacă* $a, b, c > 0$ *şi* $a + b + c = 6m$, *atunci putem alege* $m > 0$, *suficient de mic, astfel încât* $\min\{a, b, c\} \geq \frac{3m}{10}$" (dacă a, b, c sunt date atunci m este şi el fixat, deci nu îl mai putem alege convenabil: de exemplu, pentru $a = b = 20$ şi $c = 2$ avem $m = 7$, iar $2 = \min\{a, b, c\} < \frac{3m}{10}$).

Vom prezenta un raţionament din care reiese că, dacă $0 \leq n \leq 4$, atunci (1) (şi, în particular, problema 27422) este adevărată pentru orice numere reale a, b, c pentru care nu se anulează numitorii. Ideea demonstraţiei este aceea de a înlocui numitorii de forma $2a^2 + (b + c)^2$ cu numitorul $2a^2 + 2b^2 + 2c^2$; cum vrem ca această înlocuire să reprezinte o majorare a expresiei şi înlocuirea dorită măreşte numitorul, căutăm să scriem numărătorul fracţiei

$$\frac{(na + x)^2}{2a^2 + x^2}$$

sub forma $\alpha(2a^2 + x^2) - (\beta a - \gamma x)^2$, cu $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Direct, sau identificând coeficienţii, obţinem

$$\frac{(na + b + c)^2}{2a^2 + (b + c)^2} = \frac{n^2 + 2}{2} - \frac{1}{2}\frac{(2a - nb - nc)^2}{2a^2 + (b + c)^2},$$

de unde

$$\frac{(na + b + c)^2}{2a^2 + (b + c)^2} \leq \frac{n^2 + 2}{2} - \frac{1}{4}\frac{(2a - nb - nc)^2}{a^2 + b^2 + c^2},$$

deoarece $(b + c)^2 \leq 2(b^2 + c^2)$ şi $(2a - nb - nc)^2 \geq 0$. Pentru a dovedi (1) este, deci, suficient să arătăm că

$$\frac{3(n^2 + 2)}{2} - \frac{1}{4}\sum_{\text{sim}} \frac{(2a - nb - nc)^2}{a^2 + b^2 + c^2} \leq \frac{(n + 2)^2}{2},$$

adică

$$\sum_{\text{sim}} (2a - nb - nc)^2 \geq 4(n - 1)^2 \sum_{\text{sim}} a^2.$$

După efectuarea calculelor, ultima inegalitate se scrie

$$n(4 - n)\left((a - b)^2 + (a - c)^2 + (b - c)^2\right) \geq 0$$

şi este evident adevărată pentru $0 \leq n \leq 4$. $\square$

În ceea ce priveşte întrebarea „ce se întâmplă pentru $n > 4$ sau $n < 0$?“, este relativ uşor de găsit un răspuns parţial: pentru „majoritatea“ valorilor lui n, (1) este falsă, chiar dacă ne limităm la cazul $a, b, c \geq 0$ şi nu toate nule. Într-adevăr, pentru $a = 0$ şi $b = c = 1$, (1) devine

$$1 + \frac{2(n+1)^2}{3} \leq \frac{(n+2)^2}{2},$$

sau $n^2 - 4n - 2 \leq 0$, deci pentru ca (1) să fie adevărată este necesar ca $2 - \sqrt{6} \leq n \leq 2 + \sqrt{6}$.

Problema valabilităţii relaţiei (1) pentru $n \in (2 - \sqrt{6}, 0) \cup (4, 2 + \sqrt{6})$ rămâne deschisă – invităm cititorii să găsească răspunsul.