EXAMENE ŞI CONCURSURI

A 69-A OLIMPIADĂ NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa finală, 4 aprilie 2018, Satu Mare şi Negreşti Oaş

prezentare de MIHAIL BĂLUNĂ[1)]

Clasa a V-a

1. Determinaţi numerele prime $a > b > c$ pentru care $a-b$, $b-c$ şi $a-c$ sunt numere prime diferite.

Ion Cicu, Bucureşti

Soluţie. Dacă $a-b$, $b-c$, $a-c$ sunt numere prime diferite, atunci a, b, c nu pot fi toate impare. Rezultă $c = 2$ şi $a - b = 2$.

Avem $a - b = 2, b - 2 = x, a - 2 = y$, unde x şi y sunt numere prime şi de aici numerele $a = b + 2, x = b - 2$ şi $y = b$ sunt numere prime.

Numerele prime $b-2, b, b+2$ sunt numere impare consecutive, deci unul multiplu de 3, de unde $b - 2 = 3$, pentru care $b = 5$ şi $b + 2 = 7$ sunt prime. Deci $a = 7, b = 5, c = 2$ sunt numerele căutate.

2. Determinaţi numerele naturale nenule a, b, c pentru care

$$\frac{a+b}{2} + \frac{a^2+b^2}{2} = \frac{7c+1}{c+1}.$$

Mihaela Berindeanu, Bucureşti

Soluţie. Observăm că

$$M = \frac{a+b}{2} + \frac{a^2+b^2}{2} = \frac{a+b+a^2+b^2}{2} = \frac{a(1+a)+b(1+b)}{2} \in \mathbb{N},$$

întrucât $a(1+a)$ şi $b(1+b)$ sunt produse de numere naturale consecutive, deci pare.

Pe de altă parte $M = \dfrac{7c+1}{c+1} = 7 - \dfrac{6}{c+1} \in \mathbb{N}$, deci $\dfrac{6}{c+1} \in \{1, 2, 3, 6\}$.

Dacă $\dfrac{6}{c+1} = 1$, atunci $M = 6$, deci $a(1+a) + b(1+b) = 12$ cu soluţia $a = b = 2$ şi $c = 5$.

Dacă $\dfrac{6}{c+1} = 2$, atunci $M = 5$, deci $a(1+a)+b(1+b) = 10$ fără soluţie.

Dacă $\dfrac{6}{c+1} = 3$, atunci $M = 4$, deci $a(1+a) + b(1+b) = 8$ cu soluţiile $a = 1$, $b = 2$, $c = 1$ şi $a = 2$, $b = 1$, $c = 1$.

Dacă $\dfrac{6}{c+1} = 6$, atunci $c = 0$, care nu convine.

3. Pe o tablă sunt scrise numerele: $1, 2, 3, \ldots, 27$. Un *pas* înseamnă ştergerea a trei numere a, b, c de pe tablă şi scrierea în locul lor a numărului

[1)] Profesor, Colegiul Naţional „Mihai Viteazul“, Bucureşti.

$a+b+c+n$, unde n este un număr natural nenul fixat. Determinaţi numărul natural n ştiind că, după 13 paşi, pe tablă este scris numărul n^2.

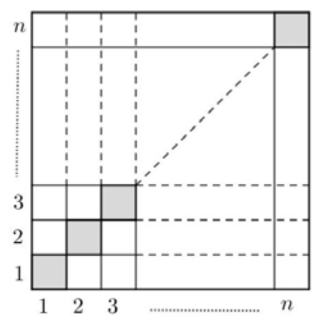
Lucian Dragomir, Oţelu Roşu

Soluţie. Remarcăm mai întâi că după fiecare pas, dispar de pe tablă două numere de fapt, aşadar după 13 paşi dispar 26 de numere, deci rămâne un singur număr. După fiecare pas suma numerelor se măreşte cu n, aşadar după 13 paşi suma de pe tablă (adică numărul rămas pe tablă) este

$$1+2+\ldots+27+13n=\frac{27\cdot 28}{2}+13n=378+13n.$$

Din $378+13n=n^2$ rezultă $378=n(n-13)$. Divizorii lui 378 sunt $D_{378}=\{1,2,3,6,7,9,14,18,21,27,42,54,63,126,189,378\}$, dintre care $n=27$ verifică proprietatea din enunţ.

4. Se consideră un număr natural $n\geq 2$ şi un pătrat $n\times n$ (vezi figura alălăturată). *Diagonala principală* a acestui pătrat este formată din câmpurile haşurate. Completăm câmpurile aflate sub diagonala principală cu zerouri, iar în restul câmpurilor (inclusiv cele haşurate) scriem numere naturale nenule. După completarea tuturor câmpurilor calculăm suma numerelor aflate pe fiecare linie şi pe fiecare coloană, obţinând astfel $2n$ sume.



Pătratul se numeşte *norocos* dacă valorile celor $2n$ sume sunt egale, într-o anumită ordine, cu numerele $1,2,\ldots,2n$.

a) Arătaţi că, pentru $n=5$, nu există pătrat norocos.

b) Dacă $n=4$, determinaţi cel mai mare număr natural care apare în completarea unui pătrat norocos.

* * *

Soluţie. a) Presupunem că există un pătrat norocos 5×5. Suma tuturor sumelor va fi $1+2+\ldots+10=55$. Suma sumelor pe linii este egală cu suma sumelor pe coloane, deci suma tuturor sumelor este pară. Dar 55 este impar, aşadar nu există pătrat norocos 5×5.

b) Dacă un câmp este ocupat de un număr $m\geq 7$, acesta nu poate fi pe prima sau pe a doua linie sau coloană, altfel suma ar fi cel puţin egală cu $m+2\geq 9>8$. Cum în restul câmpurilor se află zerouri, $m\leq 6$.

Un pătrat norocos pentru $m=6$ este în figura de mai jos. Deci, cel mai mare număr natural care apare în completarea unui pătrat norocos este 6.

1	1	1	3
2	1	1	0
1	6	0	0
1	0	0	0

Clasa a VI-a

1. Arătaţi că există o infinitate de numere naturale a şi b care verifică egalitatea $a \cdot (a, b) = b + [a, b]$, unde cu (a, b) am notat cel mai mare divizor comun al numerelor a şi b şi cu $[a, b]$ am notat cel mai mic multiplu comun al numerelor a şi b.

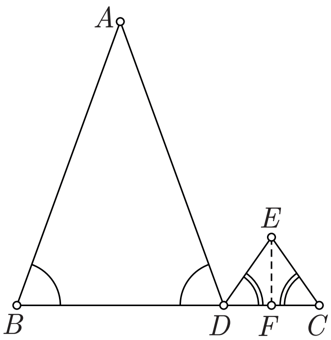
Cătalin Cristea, Craiova

Soluţie. Dacă $(a, b) = d$ şi $[a, b] = m$, atunci $a = a_1 \cdot d$, $b = b_1 \cdot d$ şi $m = a_1 \cdot b_1 \cdot d$, unde $(a_1, b_1) = 1$. Deci, $a_1 \cdot d \cdot d = b_1 \cdot d + a_1 \cdot b_1 \cdot d$, adică $a_1 \cdot d = b_1 + a_1 \cdot b_1$. De aici $a_1 | b_1$, dar $(a_1, b_1) = 1$, deci $a_1 = 1$.

Aşadar $d = b_1 + b_1 = 2b_1$, $a = 2b_1$ şi $b = 2b_1^2$. Pentru orice număr natural b_1, obţinem o pereche de numere naturale cu proprietatea din enunţ, deci sunt o infinitate de astfel de numere.

2. Se consideră segmentele congruente AB, BC şi AD, cu $D \in (BC)$. Arătaţi că mediatoarea segmentului DC, bisectoarea unghiului $\sphericalangle ADC$ şi dreapta AC sunt concurente.

Mircea Fianu, Bucureşti



Soluţie. Fie F mijlocul segmentului DC şi E intersecţia bisectoarei unghiului $\sphericalangle ADC$ şi a mediatoarei segmentului DC. În triunghiul isoscel DEC avem $\sphericalangle EDC \equiv \sphericalangle DCE$. Pe de altă parte, $\sphericalangle EDC \equiv \sphericalangle ADE$. Astfel, în triunghiul isoscel ABD, avem $m(\sphericalangle ABD) = m(\sphericalangle ADB) = 180° - 2 \cdot m(\sphericalangle ADE)$. Deci în triunghiul isoscel ABC măsurile unghiurilor congruente sunt

$$m(\sphericalangle BAC) = m(\sphericalangle ACB) = \frac{180° - m(\sphericalangle ABC)}{2} = m(\sphericalangle ECD).$$

Deci $m(\sphericalangle ACB) = m(\sphericalangle ECD)$, de unde punctele A, E şi C sunt coliniare, adică dreptele din cerinţă sunt concurente.

3. Fie numerele naturale $a \neq 0$, $b = 2a+1000$, $c = a+1$ şi $d = 2a+1002$.

a) Arătaţi că $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$.

b) Pentru $a = 9$, determinaţi cel mai mic număr natural n pentru care

$$\frac{a+n}{b+n} > \frac{c+n}{d+n}.$$

Mihail Bălună şi *Mircea Fianu*, Bucureşti

Soluţie. a) $\frac{c}{d} - \frac{a}{b} = \frac{a+1}{2a+1002} - \frac{a}{2a+1000} = \frac{1000}{(2a+1002)(2a+1000)} > 0$, de unde rezultă concluzia.

b) $\frac{a+n}{b+n} - \frac{c+n}{b+n} = \frac{9+n}{1018+n} - \frac{10+n}{1020+n} = \frac{n-1000}{(1018+n)(1020+n)} > 0$, rezultă $n > 1000$, iar cel mai mic număr natural cu această proprietate este $n = 1001$.

4. Fie n un număr natural nenul. Vom spune că o mulţime A de numere naturale este *completă de mărime n* dacă elementele ei sunt nenule, iar mulţimea tuturor resturilor obţinute la împărţirea unui element din A la un element din A este $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$. de exemplu, mulţimea $\{3, 4, 5\}$ este o mulţime completă de mărime 4. Determinaţi numărul minim de elemente ale unei mulţimi complete de mărime 100.

Mihail Bălună, Bucureşti

Soluţie. Răspuns: 27.

Un exemplu de mulţime completă de mărime 100, cu 27 de elemente, este $\{76, 77, 78, \ldots, 100\} \cup \{51, 152\}$.

Într-adevăr, la împărţirile $100 : x$, cu $76 \leq x \leq 100$, obţinem resturile $0, 1, 2, \ldots, 24$, la împărţirile $x : 51$, cu $76 \leq x \leq 100$, obţinem resturile $25, 26, \ldots, 49$, la împărţirile $152 : x$, cu $77 \leq x \leq 100$, obţinem resturile $52, 53, \ldots, 75$, la împărţirile $x : 152$, cu $76 \leq x \leq 100$, obţinem resturile $76, 77, \ldots, 100$, la împărţirea $51 : 152$ obţinem restul 51 şi la împărţirea $152 : 51$ obţinem restul 50.

Arătăm acum că orice mulţime completă de mărime 100 are cel puţin 27 de elemente.

Observăm că dacă $A = \{a_1 < a_2 < \ldots < a_n\}$ este o mulţime de tipul cerut, atunci cel mai mare rest care se obţine la împărţirea a două elemente din A este a_{n-1}, obţinut la împărţirea $a_{n-1} : a_n$. Deducem că $a_{n-1} = 100$.

Să urmărim acum resturile ≥ 50. Aceste resturi se obţin sigur când împărţim elemente ≥ 51 la elemente mai mari decât ele şi se mai pot obţine doar când împărţim a_n la elemente ≥ 51. Astfel, numărul resturilor ≥ 50 obţinute este cel mult dublul numărului elementelor lui A cuprinse între 51 şi 100. Deoarece numărul resturilor ≥ 50 care trebuie obţinute este 51, rezultă că A trebuie să conţină cel puţin 26 de numere dintre $51, 52, 53, \ldots, 100$. Cum A conţine şi elementul $a_n > 100$, reiese că A are cel puţin 27 de elemente.

Clasa a VII-a

1. Determinaţi numerele naturale nenule distincte a, b, c, d, care au simultan proprietăţile:

(1) exact trei dintre cele patru numere sunt prime;

(2) $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2018$.

Lucian Dragomir, Oţelu Roşu

Soluţie. Deoarece $2018 = \mathcal{M}4 + 2$, două numere sunt pare şi două impare, deci un număr este 2. Apoi, deoarece $2018 = \mathcal{M}3 + 2$, două numere sunt multipli de 3 şi două sunt $\mathcal{M}3 \pm 1$, deci un număr este 3.

Dacă $a < b < c < d$, atunci $a = 2, b = 3$ şi $c^2 + d^2 = 2005$. Deducem, ca mai sus, $c = 3k$ sau $d = 3k$. Avem $k \leq 14$ şi, analizând cazurile, obţinem $k = 6$. Soluţiile sunt $a = 2, b = 3, c = 18, d = 41$ şi permutările lor circulare.

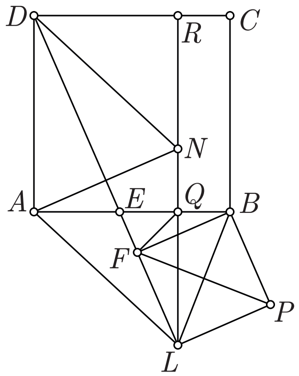
2. În pătratul $ABCD$, punctul E este situat pe latura $[AB]$, iar F este piciorul perpendicularei din B pe dreapta DE. Punctul L aparţine dreptei

DE astfel încât F este între E şi L, iar $FL = BF$. Dacă N şi P sunt simetricele punctelor A şi F faţă de dreptele DE, respectiv BL, demonstraţi că:

a) patrulaterul $BFLP$ este pătrat şi patrulaterul $ALND$ este romb;

b) aria rombului $ALND$ este egală cu diferenţa dintre ariile pătratelor $ABCD$ şi $BFLP$.

Claudiu-Ştefan Popa, Iaşi



Soluţie. a) Deoarece $\triangle FLB$ dreptunghic isoscel, $BFLP$ este pătrat. Apoi $m(\sphericalangle DAB) = m(\sphericalangle BFD) = 90^\circ$, deci $AFBD$ este patrulater inscriptibil, de unde $m(\sphericalangle AFB) = 135^\circ$. Rezultă $m(\sphericalangle AFL) = 360^\circ - 135^\circ - 90^\circ = 135^\circ$. Deducem $\triangle AFL \equiv \triangle AFB$ (LUL), $AL = AB = AD$ şi $ALND$ este romb.

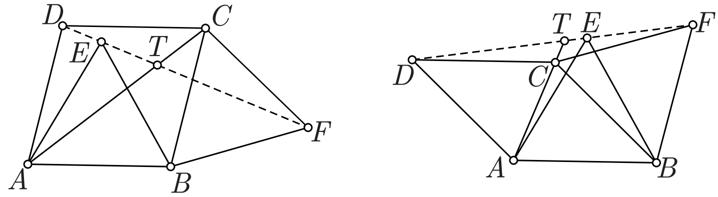
b) Dacă LN intersectează AB şi CD în Q respectiv R, atunci $AQRD$ este dreptunghi, $\triangle ALQ \equiv \triangle DNR$ (IC) şi $A_{ALND} = A_{AQRD}$. Apoi $m(\sphericalangle BFL) = m(\sphericalangle LQB) = 90^\circ$, deci $BQFL$ este patrulater inscriptibil, de unde $m(\sphericalangle FQB) = 135^\circ$.

Deducem $\triangle FQB \sim \triangle AFB$ (UU), $\dfrac{AB}{FB} = \dfrac{BF}{BQ}$, $AB \cdot BQ = BF^2 = BC \cdot BQ$, $A_{BCRQ} = A_{BFLP}$, $A_{ALND} = A_{ABCD} - A_{BFLP}$.

3. Pe laturile $[AB]$ şi $[BC]$ ale paralelogramului $ABCD$ se construiesc triunghiurile echilaterale ABE şi BCF, astfel încât punctele D şi E sunt de aceeaşi parte a dreptei AB, iar F şi D de o parte şi de alta a dreptei BC. Dacă punctele E, D şi F sunt coliniare, demonstraţi că $ABCD$ este romb.

Petru Braica, Satu Mare şi *Andrei Eckstein*, Timişoara

Soluţie. Fie T punctul de intersecţie al dreptelor AC şi DF. Atunci $\triangle ABC \equiv \triangle EBF$ (LUL), deci $\sphericalangle FEB = \sphericalangle CAB$, iar $E, T \in DF$.



În funcţie de aşezarea punctelor D, E, F, T avem $\sphericalangle ATD = \sphericalangle ATE = 180^\circ - \sphericalangle TAE - \sphericalangle TEA = 180^\circ - \sphericalangle TAE - \sphericalangle FEB - \sphericalangle AEB$ sau $\sphericalangle ATD = 180^\circ - \sphericalangle ATE = \sphericalangle TAE + \sphericalangle TEA = \sphericalangle TAE + 180^\circ - \sphericalangle AEB - \sphericalangle FEB$; în ambele cazuri obţinem $\sphericalangle ATD = 180^\circ - \sphericalangle AEB - \sphericalangle EAB = 60^\circ$.

Rezultă, de asemenea, că $\sphericalangle CTF$ este congruent sau suplementar cu $\sphericalangle CBF$ şi, în toate cazurile, T este pe cercul (B, C, F).

Deducem $\sphericalangle ATB = \sphericalangle CFB = 60^\circ = \sphericalangle ATD$ şi din $\sphericalangle ATD = \sphericalangle ATB$ deducem că TA este bisectoare şi mediană în triunghiul TBD, deci este şi mediatoare în acest triunghi, de unde reiese că $ABCD$ este romb.

4. Determinaţi numerele naturale n pentru care numărul $\sqrt{\dfrac{20^n - 18^n}{19}}$ este raţional.

Marius Mîinea, Găeşti

Soluţie. Observăm că $n = 0$ convine.

Pentru $n \geq 1$, trebuie ca $20^n - 18^n = 19x^2$, sau $2^n(10^n - 9^n) = 19x^2$, cu x natural nenul. Rezultă că n este par: $n = 2m$, cu m natural nenul.

Din $2^{2m}(10^{2m} - 9^{2m}) = 19x^2$, obţinem succesiv $x = 2^m y$, y impar, $10^{2m} - 9^{2m} = 19y^2$, $(10^m - 9^m) \cdot (10^m + 9^m) = 19y^2$.

Cum $(10^m - 9^m, 10^m + 9^m) = 1$, apar două cazuri.

Cazul I: Există a, b naturale impare, cu $10^m + 9^m = 19a^2$ şi $10^m - 9^m = b^2$, deci $10^m = 9^m + b^2 = \mathcal{M}4 + 1 + \mathcal{M}4 + 1 = \mathcal{M}4 + 2$, caz în care $m = 1, b = 1, a = 1, y = 1, x = 2, n = 2$.

Cazul II: Există a, b naturale impare, cu $10^m + 9^m = a^2$ şi $10^m - 9^m = 19b^2$, deci $10^m = 9^m + 19b^2 = \mathcal{M}8 + 1 + 19(\mathcal{M}8 + 1) = \mathcal{M}8 + 4$, de unde $m = 2$, $b = 1$, $a^2 = 181$, contradicţie. Astfel, rm̆ân doar soluţiile $n = 0$ şi $n = 2$

Clasa a VIII-a

1. Demonstraţi că există o infinitate de mulţimi formate din patru numere naturale nenule care au proprietatea că suma oricăror trei elemente ale mulţimii este pătrat perfect.

Cătălin Cristea, Craiova

Soluţie. Evident, dacă $\{a, b, c, d\}$ este o mulţime cu proprietatea din enunţ, atunci şi mulţimea $\{n^2 a, n^2 b, n^2 c, n^2 d\}$ este, pentru orice număr natural nenul n, o mulţime cu proprietatea dorită, deci este suficient să găsim o asemenea mulţime.

Pentru aceasta, dacă $a + b + c = x^2$, $a + b + d = y^2$, $a + c + d = z^2$, $b + c + d = t^2$, cu $x, y, z, t \in \mathbb{N}$, atunci prin adunare obţinem $3(a + b + c + d) = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$, de unde

$$a = \frac{x^2 + y^2 + z^2 + t^2}{3} - t^2, \qquad b = \frac{x^2 + y^2 + z^2 + t^2}{3} - z^2,$$

$$c = \frac{x^2 + y^2 + z^2 + t^2}{3} - y^2, \quad d = \frac{x^2 + y^2 + z^2 + t^2}{3} - x^2.$$

Pentru ca aceste numere să fie naturale şi nenule, trebuie să alegem x, y, z, t astfel încât $3 \mid x^2 + y^2 + z^2 + t^2$ şi $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 > 3 \max\{x^2, y^2, z^2, t^2\}$. Există multe alegeri convenabile pentru x, y, z, t. de exemplu $\{x, y, z, t\} = \{8, 9, 10, 11\}$ conduce la $\{a, b, c, d\} = \{1, 22, 41, 58\}$.

2. Fie a, b, c, d numere naturale astfel încât $a+b+c+d=2018$. Aflaţi valoarea minimă a expresiei

$$E=(a-b)^2+2(a-c)^2+3(a-d)^2+4(b-c)^2+5(b-d)^2+6(c-d)^2.$$

Mihai Bunget, Târgu Jiu

Soluţie. Arătăm că minimul căutat este 14. Această valoare este într-adevăr atinsă, de exemplu dacă $a=b=505$ şi $c=d=504$.

Deoarece 2018 nu este divizibil cu 4, numerele a, b, c, d nu pot fi toate egale.

Dacă trei dintre ele sunt egale, atunci trei dintre pătrate sunt 0, iar celelalte trei sunt nenule. În plus, cele patru numere trebuie să aibă aceeaşi paritate, deci celelalte pătrate sunt cel puţin 4. Astfel $E \geq 4+2\cdot4+3\cdot4>14$.

Dacă două dintre numere sunt egale, iar celelalte două sunt diferite (de acestea două şi diferite între ele), atunci $E \geq 1+2+3+4+5=15>14$.

Dacă două dintre numere sunt egale, iar celelalte două sunt şi ele egale, atunci: $a=b$, $c=d$ implică $E \geq 2+3+4+5=14$, $a=c$, $b=d$ implică $E \geq 1+3+4+6=14$, iar $a=d$, $b=c$ implică $E \geq 1+2+5+6=14$.

În fine, dacă a, b, c, d sunt diferite două câte două atunci

$$E \geq 1+2+3+4+5+6>14.$$

3. Fie $a, b, c \geq 0$ astfel încât $ab+bc+ca=3$. Demonstraţi că

$$\frac{a}{a^2+7}+\frac{b}{b^2+7}+\frac{c}{c^2+7} \leq \frac{3}{8}.$$

Dan Moldovan, Cluj-Napoca

Soluţie. Scriem $\dfrac{a}{a^2+7}=\dfrac{a}{a^2+ab+bc+ca+4}=\dfrac{a}{(a+b)(a+c)+4}$.

Din inegalitatea mediilor,

$$(a+b)(a+c)+4 \geq 2\sqrt{(a+b)(a+c)\cdot 4}=4\sqrt{(a+b)(a+c)}.$$

Deoarece $a+b>0$, $a+c>0$ ($a+b=0$ ar implica $a=b=0$ şi ar contrazice $ab+bc+ca=3$), putem scrie

$$\frac{a}{a^2+7} \leq \frac{1}{4}\cdot\frac{a}{\sqrt{(a+b)(a+c)}}=\frac{1}{4}\cdot\sqrt{\frac{a}{a+b}\cdot\frac{a}{a+c}}.$$

Aplicând din nou inegalitatea mediilor obţinem

$$\frac{a}{a^2+7} \leq \frac{1}{8}\left(\frac{a}{a+b}+\frac{a}{a+c}\right).$$

Analog se obţin relaţiile

$$\frac{b}{b^2+7} \leq \frac{1}{8}\left(\frac{b}{b+c}+\frac{b}{b+a}\right) \text{ şi } \frac{c}{c^2+7} \leq \frac{1}{8}\left(\frac{c}{c+a}+\frac{c}{c+b}\right).$$

Prin adunarea acestor trei inegalităţi se obţine inegalitatea din enunţ.

4. În paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ notăm cu M centrul feţei $ABB'A'$. Notăm cu M_1 şi M_2 proiecţiile lui M pe dreptele $B'C$ şi, respectiv, AD'. Demonstraţi că:

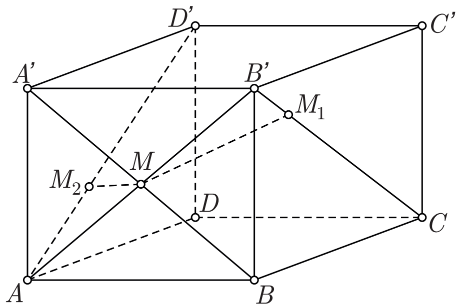
a) $[MM_1] \equiv [MM_2]$;

b) dacă $(MM_1M_2) \cap (ABC) = d$, atunci $d \parallel AD$;

c) $\mathrm{m}\left(\sphericalangle\left((MM_1M_2), (ABC)\right)\right) = 45^\circ \Leftrightarrow \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{BB'}{BC} + \dfrac{BC}{BB'}$.

Alexandru Blaga, Satu Mare

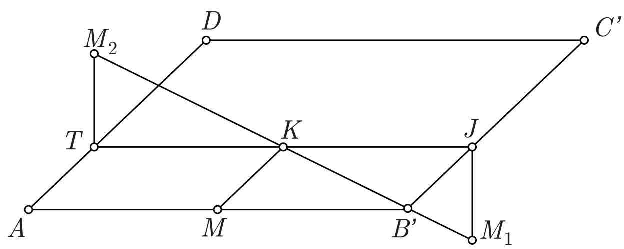
Soluţie. a) Deoarece triunghiurile $AB'C$ şi $B'AD'$ sunt congruente (L.L.L.), $\sphericalangle AB'C \equiv \sphericalangle B'AD'$. Cum $\sphericalangle MB'M_1 \equiv \sphericalangle MAM_2$ $\sphericalangle MM_1B' \equiv \equiv \sphericalangle MM_2A$ şi $[MB'] \equiv [MA]$, triunghiurile MM_2A şi MM_1B' sunt congruente (I.U.) şi de aici $[MM_1] \equiv [MM_2]$.



b) Construim $M_1J \perp B'C'$, $J \in B'C'$ şi $M_2T \perp AD$, $T \in AD$. Atunci $M_1J \parallel M_2T$ (ambele perpendiculare pe (ABC)). Apoi, $B'M_1 = AM_2$ şi $\sphericalangle M_1B'J \equiv \sphericalangle M_2AT$ implică $\Delta\, M_1B'J \equiv \Delta\, M_2AT$ (I.U.), deci $M_1J = M_2T$. Rezultă că M_1JM_2T este paralelogram.

Fie K punctul de intersecţie a diagonalelor sale. Dar $AT = B'J$ şi $AT \parallel B'J$ implică $ATJB'$ - paralelogram, deci $MK \parallel AT$.

Cum $MK \subset (MM_1M_2)$ şi $AT \subset (ABC)$, rezultă că $d \parallel AD$.



c) Fie $MM_1 \cap AC = \{L\}$ şi $MM_2 \cap (ABC) = \{S\}$.

Atunci $AS \parallel BD \parallel B'D'$ deoarece $B'D' \subset (AB'D')$, $B'D' \parallel BD$ şi $BD \subset (ABC)$. Deci $d = LS$.

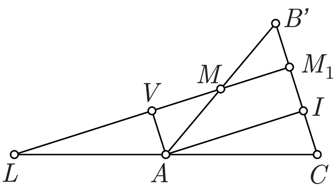
Fie $AV \perp LM_1$. Atunci triunghiurile AVM şi $B'M_1M$ sunt congruente (I.U.), deci $AV = B'M_1 = AM_2$. Din $AV \parallel B'C$ rezultă că $\sphericalangle LAV \equiv \equiv \sphericalangle ACB' \equiv \sphericalangle AD'B' \equiv \sphericalangle SAM_2$ (alterne interne deoarece $AS \parallel B'D'$). Atunci triunghiurile AVL şi AM_2S sunt congruente (C.U.), deci $AL = AS$.

Dacă U este mijlocul lui $[LS]$, cum $AU \perp LS$ şi $AB \perp LS$ rezultă A, B, U coliniare.

Planul (MAB) este planul mediator al lui $[LS]$, deci $MU \perp LS$ şi $AU \perp LS$.

Cum $MU \subset (MM_1M_2)$ şi $AU \subset (ABC)$, deducem că $m(\sphericalangle((MM_1M_2), (ABC))) = m(\sphericalangle MUA)$. Atunci $m(\sphericalangle MUA) = 45° \Leftrightarrow \dfrac{BB'}{2} = \dfrac{AB}{2} + AU \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow BB' - AB = 2AU$. Dacă $BI \perp B'C$, $I \in B'C$, din teorema celor trei perpendiculare rezultă $AI \perp B'C$. În triunghiul $BB'C$ avem $BI = \dfrac{BB' \cdot BC}{B'C}$, deci $AI^2 = AB^2 + \dfrac{BC^2 \cdot B'B^2}{BC^2 + B'B^2}$, $CI^2 = AB^2 + BC^2 - AI^2$, adică

$$CI = \frac{BC^2}{\sqrt{BC^2 + B'B^2}}.$$



În triunghiul LM_1C, $AI \parallel LM_1$, $M_1I = B'M_1$, deci $\dfrac{LA}{AC} = \dfrac{M_1I}{CI} = \dfrac{B'M_1}{CI}$.

Cum $B'M_1 = \dfrac{B'B^2}{2\sqrt{BC^2 + B'B^2}}$, rezultă

$LA = \dfrac{B'B^2}{2BC^2} \cdot \sqrt{AB^2 + BC^2}$. Deoarece $\Delta\, AUL \sim \Delta\, CDA$ deducem că $\dfrac{AU}{AL} = \dfrac{AB}{\sqrt{AB^2 + BC^2}}$, deci $AU = \dfrac{AB \cdot B'B^2}{2BC^2}$.

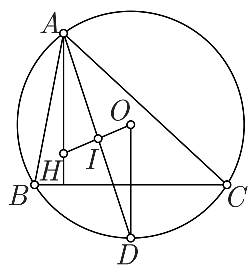
Atunci $m(\sphericalangle MUA) = 45° \Leftrightarrow 2AU = \dfrac{AB \cdot B'B^2}{BC^2} = B'B - AB \Leftrightarrow AB \cdot B'B^2 +$ $+AB \cdot BC^2 = BC^2 \cdot B'B \Leftrightarrow \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{BB'}{BC} + \dfrac{BC}{BB'}$.

Clasa a IX-a

1. Arătaţi că, dacă într-un triunghi ortocentrul H, centrul de greutate G şi centrul I al cercului înscris sunt coliniare, atunci triunghiul este isoscel.

Gefry Barad şi *Petre Simion*, Bucureşti

Soluţie. Dacă triunghiul este echilateral, concluzia este verificată.



Dacă triunghiul este isoscel, atunci o bisectoare este şi mediană, deci concluzia este valabilă.

În caz contrar, deoarece G, H şi centrul O al cercului circumscris triunghiului sunt coliniare, deducem că I este pe OH.

Bisectoarea din A trece prin mijlocul D al arcului $\overset{\frown}{BC}$ din cercul circumscris triunghiului, care nu-l conţine pe A.

Dacă triunghiul nu este isoscel, O, I şi H sunt distincte, iar $OD \parallel AH$ implică $\frac{AH}{OD} = \frac{HI}{OI}$, de unde $AH = \frac{HI}{OI}R$, unde R este raza cercului circumscris. În mod analog deducem $BH = \frac{HI}{OI}R$, $CH = \frac{HI}{OI}R$, deci H coincide cu O, ceea ce contrazice ipoteza din acest caz.

2. Demonstraţi că dacă $a, b, c \geq 0$ şi $a + b + c = 3$, atunci

$$\frac{a}{1+b} + \frac{b}{1+c} + \frac{c}{1+a} \geq \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c}.$$

Marian Cucoaneş, Mărăşeşti şi *Marius Drăgan*, Bucureşti

Soluţie. Eliminând numitorii, obţinem relaţia echivalentă

$$a^2c + b^2a + c^2b + \sum a^2 + \sum ab + \sum a \geq 3 + 2\sum a + \sum ab,$$

adică $a^2c + b^2a + c^2b + \sum a^2 \geq 6$.

Avem $a^2c \geq 2ac - c$ şi analoagele. Este deci suficient să arătăm că $\sum a^2 + 2\sum ab - \sum a \geq 6$, adică $\left(\sum a\right)^2 - \sum a \geq 6$, ceea ce reiese imediat din ipoteză.

3. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ două funcţii de gradul 2 cu proprietatea: pentru orice număr real r, dacă $f(r)$ este număr întreg, atunci şi $g(r)$ este număr întreg. Demonstraţi că există două numere întregi m şi n astfel încât $g(x) = mf(x) + n$, oricare ar fi numărul real x.

Vasile Pop, Cluj-Napoca

Soluţie. Înlocuind, eventual, f cu $-f$, putem presupune $f(x) = ax^2 + bx + c$, $g(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, cu $a > 0$. Pentru t întreg, $t \geq \min f$, fie r'_t, r''_t soluţiile ecuaţiei $f(x) = t$. Atunci $g(r'_t) = \frac{\alpha}{a}(t - br'_t - c) + \beta r'_t + \gamma = mt + pr'_t + n$, unde $m = \frac{\alpha}{a}$, $p = \beta - \frac{\alpha b}{a}$, $n = \gamma - \frac{\alpha c}{a}$; analog pentru $g(r''_t)$.

Numărul $h(t) = |g(r'_t) - g(r''_t)| = |p||r'_t - r''_t| = \frac{|p|}{a}\sqrt{b^2 - 4ac + 4at}$ este întreg pentru orice $t \geq \min f$ şi avem

$$h(t+1) - h(t) = \frac{4|p|}{\sqrt{b^2 - 4ac + 4at} + \sqrt{b^2 - 4ac + 4a(t+1)}}.$$

Dacă $p \neq 0$, pentru t ales astfel încât $b^2 - 4ac + 4at > 4p^2$ obţinem $0 < h(t+1) - h(t) < 1$ şi $h(t+1) - h(t) \in \mathbb{Z}$ – fals. Rezultă $p = 0$, adică $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{b}{a}$. Obţinem astfel $g(r'_t) = mt + n$ pentru orice t întreg, $t \geq \min f$, deci $g(r'_{t+1}) - g(r'_t) = m$ este întreg, adică $\alpha = ma$, cu m întreg. În sfârşit $\gamma = n + cm$, cu n întreg, deci $g(x) = max^2 + mbx + cm + n = mf(x) + n$, cu m, n numere întregi.

4. Considerăm un număr natural nenul n, un cerc de lungime $6n$ şi $3n$ puncte care împart cercul în $3n$ arce mici, astfel încât n dintre aceste arce au lungimea 1, alte n dintre aceste arce au lungimea 2, iar cele n arce rămase au lungimea 3.

Arătaţi că printre punctele considerate există două care sunt diametral opuse.

Vyacheslav Proizvolov

Soluţie. Punctele considerate sunt o parte dintre vârfurile unui poligon cu $6n$ laturi, înscris în cercul dat.

Presupunem contrariul. Atunci capetele fiecărui arc de lungime 1 au ca puncte diametral opuse două puncte situate în interiorul unui arc de lungime 3. Astfel, fiecărui arc de lungime 1 i se asociază un arc „diametral opus" de lungime 3. Fixăm un arc de lungime 1 şi arcul „diametral opus" de lungime 3. Capetele lor determină două arce mici $\overset{\frown}{AB}$ şi $\overset{\frown}{CD}$ de lungimi $\frac{1}{2}(6n-4)=3n-2$.

Fie p şi q numărul arcelor de lungime 1, respectiv 3, conţinute de $\overset{\frown}{AB}$. Atunci $\overset{\frown}{CD}$ conţine p arce de lungime 3 şi q arce de lungime 1. Fie r numărul arcelor de lungime 2 conţinute de $\overset{\frown}{AB}$. Deoarece $\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{CD}$ au împreună $n-1$ arce de lungime 1 şi $n-1$ arce de lungime 3, obţinem $p+q=n-1$, de unde $3n-2=\overset{\frown}{AB}=p+3q+2r=n-1+2(q+r)$, ceea ce conduce la $2n-11=2(q+r)$ – imposibil.

Clasa a X-a

1. Fie $n\in\mathbb{N}, n\geq 2$, şi numerele $a_1,a_2,\ldots,a_n\in(1,\infty)$. Demonstraţi că funcţia $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, definită prin relaţia

$$f(x)=(a_1a_2\ldots a_n)^x-a_1^x-a_2^x-\ldots-a_n^x,$$

pentru orice $x\in[0,\infty)$, este strict crescătoare.

Mihai Piticari, C-lung Moldovenesc şi *Sorin Rădulescu*, Bucureşti

Soluţie. Vom realiza demonstraţia prin inducţie matematică.

Pentru $n=2$, fie $a_1,a_2\in(1,\infty)$. Avem

$$f(x)=(a_1a_2)^x-a_1^x-a_2^x=(a_1^x-1)(a_2^x-1)-1.$$

Deoarece funcţiile $f_1,f_2:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, definite prin relaţiile $f_1(x)=a_1^x-1$ şi $f_2(x)=a_2^x-1$, oricare ar fi $x\in[0,\infty)$, sunt strict crescătoare şi pozitive, rezultă că f este strict crescătoare.

Presupunem că proprietatea este adevărată pentru oricare n numere din $(1,\infty)$ şi o demonstrăm pentru $n+1$ numere $a_1,a_2,\ldots,a_n,a_{n+1}\in(1,\infty)$. Avem

$$\begin{aligned}f(x)&=(a_1a_2\ldots a_na_{n+1})^x-a_1^x-a_2^x-\ldots-a_n^x-a_{n+1}^x=\\&=\left((a_1a_2\ldots a_na_{n+1})^x-(a_1a_2\ldots a_n)^x-a_{n+1}^x\right)+\\&\quad+\left((a_1a_2\ldots a_n)^x-a_1^x-a_2^x-\ldots-a_n^x\right).\end{aligned}$$

Funcţia $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = (a_1 a_2 \ldots a_n a_{n+1})^x - (a_1 a_2 \ldots a_n)^x - a_{n+1}^x$, este strict crescătoare deoarece $a_1 a_2 \ldots a_n > 1$ şi $a_{n+1} > 1$ (cazul $n = 2$).

Funcţia $h : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $h(x) = (a_1 a_2 \ldots a_n)^x - a_1^x - a_2^x - \ldots - a_n^x$, este strict crescătoare conform ipotezei de inducţie. Atunci $f = g + h$ este strict crescătoare. Rezultă că proprietatea din enunţ este demonstrată.

2. Triunghiul ABC este înscris în cercul $\mathcal{C}(O, 1)$. Fie G_1, G_2, G_3 centrele de greutate ale triunghiurilor OBC, OAC şi, respectiv, OAB.

Demonstraţi că triunghiul ABC este echilateral dacă şi numai dacă $AG_1 + BG_2 + CG_3 = 4$.

Nicolae Muşuroia, Baia Mare

Soluţie. Dacă triunghiul ABC este echilateral, avem $AG_1 = BG_2 = CG_3 = \frac{4}{3}$, de unde obţinem $AG_1 + BG_2 + CG_3 = 4$.

Reciproc, considerăm planul complex ABC cu originea în O. Notăm cu p afixul unui punct P din planul complex considerat. Avem $g_1 = \frac{b+c}{3}$, $g_2 = \frac{c+a}{3}$ şi $g_3 = \frac{a+b}{3}$. Egalitatea $AG_1 + BG_2 + CG_3 = 4$ este echivalentă cu $\sum \left| a - \frac{b+c}{3} \right| = 4$, sau $\sum |3a - b - c\,| = 12$. Fie H ortocentrul triunghiului ABC. Deoarece $h = a + b + c$, conform teoremei lui *Sylvester*, egalitatea precedentă este echivalentă cu $\sum |4a - h| = 12$. Atunci

$$144 = \left(\sum |4a - h| \right)^2 \leq 3 \sum |4a - h\,|^2 = 3 \sum \left(16|a|^2 - 4a\overline{h} - 4\overline{a}h + |h|^2 \right) =$$
$$= 144 - 12\overline{h} \sum a - 12h \sum \overline{a} + 3\,|h|^2 = 144 - 21\,|h|^2 .$$

Obţinem $|h|^2 \leq 0$, deci $|h| = 0$. Rezultă $O = H$, deci triunghiul ABC este echilateral.

3. Fie $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$. Demonstraţi că, pentru orice numere complexe $a_1, a_2, \ldots, a_n$ şi $b_1, b_2, \ldots, b_n$, următoarele afirmaţii sunt echivalente:

a) $\sum\limits_{k=1}^{n} |z - a_k|^2 \leq \sum\limits_{k=1}^{n} |z - b_k|^2$, pentru orice $z \in \mathbb{C}$;

b) $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$ şi $\sum\limits_{k=1}^{n} |a_k|^2 \leq \sum\limits_{k=1}^{n} |b_k|^2$.

Vasile Pop, Cluj-Napoca

Soluţie. b) $\Rightarrow$ a). Avem pentru orice $z \in \mathbb{C}$,

$$\sum_{k=1}^{n} |z - a_k|^2 = n\,|z|^2 - z \sum_{k=1}^{n} \overline{a}_k - \overline{z} \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 \leq$$
$$\leq n\,|z|^2 - z \sum_{k=1}^{n} \overline{b}_k - \overline{z} \sum_{k=1}^{n} b_k + \sum_{k=1}^{n} |b_k|^2 = \sum_{k=1}^{n} |z - b_k|^2 ,$$

a) $\Rightarrow$ b). Alegând $z=0$, obţinem $\sum\limits_{k=1}^{n}|a_k|^2 \le \sum\limits_{k=1}^{n}|b_k|^2$.

Notăm $a=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$ şi $b=\sum\limits_{k=1}^{n}b_k$. Presupunem, prin reducere la absurd, că $a\neq b$. Fie $z=(1-t)\,a+tb$, unde $t\in\mathbb{R}$. Atunci

$$\sum_{k=1}^{n}|z-a_k|^2 = n\,|z|^2 - z\sum_{k=1}^{n}\overline{a}_k - \overline{z}\sum_{k=1}^{n}a_k + \sum_{k=1}^{n}|a_k|^2 =$$

$$= (n-1)\,|z|^2 + |z|^2 - z\overline{a} - \overline{z}a + |a|^2 + \left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2 - |a|^2\right) =$$

$$= (n-1)\,|z|^2 + |z-a|^2 + \left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2 - |a|^2\right) =$$

$$= (n-1)\,|z|^2 + t^2\,|b-a|^2 + \left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2 - |a|^2\right).$$

Analog avem

$$\sum_{k=1}^{n}|z-b_k|^2 = (n-1)\,|z|^2 + (1-t)^2\,|b-a|^2 + \left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^2 - |b|^2\right).$$

Atunci

$$\sum_{k=1}^{n}|z-a_k|^2 - \sum_{k=1}^{n}|z-b_k|^2 =$$

$$= 2t\,|b-a|^2 + \left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2 - |a|^2\right) - \left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^2 - |b|^2\right) - |b-a|^2.$$

Pentru

$$t > \frac{|b-a|^2 + \left(\sum\limits_{k=1}^{n}|b_k|^2 - |b|^2\right) - \left(\sum\limits_{k=1}^{n}|a_k|^2 - |a|^2\right)}{2\,|b-a|^2},$$

este contrazisă ipoteza. Atunci $a=b$.

4. Fie $n\in\mathbb{N}^*$, $n\ge 2$. Pentru numerele reale $a_1,a_2,\ldots,a_n$, notăm $S_0=1$ şi $S_k=\sum\limits_{1\le i_1<i_2<\ldots<i_k\le n} a_{i_1}a_{i_2}\ldots a_{i_k}$, suma tuturor produselor de câte k numere alese dintre $a_1,a_2,\ldots,a_n$, $k\in\{1,2,\ldots,n\}$.

Determinaţi numărul n-uplelor $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ pentru care are loc

$$(S_n - S_{n-2} + S_{n-4} - \ldots)^2 + (S_{n-1} - S_{n-3} + S_{n-5} - \ldots)^2 = 2^n S_n.$$

Dorin Andrica, Cluj-Napoca

Soluţie. Are loc identitatea

$$\prod_{k=1}^{n}(a_k+i)=(S_n-S_{n-2}+S_{n-4}-\cdots)+i(S_{n-1}-S_{n-3}+S_{n-4}-\cdots).$$

Rezultă

$$(S_n-S_{n-2}+S_{n-4}-\cdots)^2+(S_{n-1}-S_{n-3}+S_{n-4}-\cdots)^2=$$
$$=\left|\prod_{k=1}^{n}(a_k+i)\right|^2=\prod_{k=1}^{n}|\ a_k+i|^2=\prod_{k=1}^{n}\left(\ a_k^2+1\right).$$

Relaţia din enunţ este echivalentă cu

$$\prod_{k=1}^{n}\left(\ a_k^2+1\right)=2^n a_1 a_2\cdots a_n.$$

Din inegalităţile $a_k^2+1\geq 2\left|a_k\right|$, pentru orice $k\in\{1,2,\ldots,n\}$, rezultă că egalitatea în relaţia din enunţ are loc dacă şi numai dacă $|a_1|=|a_2|=\cdots=|a_n|=1$, iar numărul de valori egale cu -1 este par.

Prin urmare, numărul n-uplelor $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ pentru care are loc relaţia din enunţ este $C_n^0+C_n^2+C_n^4+\ldots=2^{n-1}$.

Clasa a XI-a

1. Pentru orice număr natural nenul n şi orice matrice coloană

$$X=\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & \ldots & x_n\end{pmatrix}^T\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{Z}),$$

notăm $\delta(X)$ cel mai mare divizor natural comun al numerelor $x_1,x_2,\ldots,x_n$. Fie $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$ şi $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Arătaţi că următoarele două afirmaţii sunt echivalente:

a) $|\det A|=1$; b) $\delta(AX)=\delta(X)$, oricare ar fi $X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{Z})$.

* * *

Soluţie. a) $\Rightarrow$ b). Fie $B=(b_{ij})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$, fie $X=(x_j)\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{Z})$ şi fie $BX=(y_i)\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{Z})$. Cum $y_i=\sum_{j=1}^n b_{ij}x_j$, $i=1,2,\ldots,n$, rezultă că $\delta(X)$ divide fiecare y_i, deci $\delta(X)\leq\delta(BX)$. Cum A este inversabilă în $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$, rezultă că $\delta(X)\leq\delta(AX)\leq\delta(A^{-1}(AX))=\delta(X)$, oricare ar fi X din $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{Z})$.

b) $\Rightarrow$ a). Fie $d=\det A$. Dacă $d=0$, atunci sistemul omogen $AX=O_{n,1}$ are soluţii nenule în $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{Q})$ şi, prin înmulţirea uneia dintre aceste soluţii cu produsul numitorilor componentelor sale nenule, obţinem un $X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{Z})$, $X\neq O_{n,1}$, astfel încât $AX=O_{n,1}$. Deci $0<\delta(X)=\delta(AX)=\delta(O_{n,1})=0$, o contradicţie. Prin urmare, $d\neq 0$.

Fie X_i coloana i a matricei A^*, $i=1,2,\ldots,n$. Cum matricea coloană AX_i are toate componentele nule, cu excepţia componentei i, care este egală cu d, rezultă că $d=\delta(AX_i)=\delta(X_i)$, $i=1,2,\ldots,n$, deci toate elementele lui A^* sunt divizibile cu d. Prin urmare, $\det A^*$ este divizibil cu d^n. Cum $\det A^*=d^{n-1}$ şi $d\neq 0$, rezultă că $d=\pm 1$.

Remarcă. O matrice pătrată cu elemente întregi şi determinant ± 1 se numeşte *unimodulară*. Evident, produsul a două matrice unimodulare este unimodular şi orice matrice unimodulară este inversabilă, iar inversa ei este şi ea unimodulară. Conform unei teoreme a lui *Frobenius*, pentru orice matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{Z})$, există un număr natural $r \leq \min(m,n)$ şi două matrice unimodulare P şi Q, astfel încât $PAQ = \operatorname{diag}(d_1, \dots, d_r, 0, \dots, 0)$, unde toţi d_i sunt numere naturale şi fiecare d_i îl divide pe d_{i+1}.

Fie $m = n$ şi fie $\delta(AX) = \delta(X)$ oricare ar fi X în $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{Z})$. Unimodularitatea lui Q implică $\delta(X) = \delta(QX)$; prin ipoteză, $\delta(QX) = \delta(AQX)$, iar unimodularitatea lui P implică $\delta(AQX) = \delta(PAQX)$. Deci $\delta(X) = \delta(PAQX)$, oricare ar fi X în $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{Z})$. Întrucât PAQ are forma diagonală de mai sus, rezultă că $r = n$ şi toţi $d_i = 1$, deci $A = P^{-1}Q^{-1}$ este unimodulară.

2. Arătaţi că $2^{-x} + 2^{-1/x} \leq 1$, oricare ar fi numărul real $x > 0$.

$* * *$

Soluţie. Fie $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2^{-x} + 2^{-1/x}$. Cum $f(x) = f(1/x)$, este suficient să arătăm că $f(x) \leq 1$, oricare ar fi $x \in (0,1]$.

Cum f este derivabilă şi $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1 = f(1)$, pentru a demonstra inegalitatea din enunţ, este suficient să arătăm că valoarea lui f în orice zero al derivatei f' din $(0,1)$ este cel mult 1.

Fie $a \in (0,1)$, astfel încât $f'(a) = 0$. Rezultă că $2^{-1/a}/a^2 = 2^{-a}$, deci $2^{-1/a} = 2^{-a}a^2$. Cum $f(a) = 2^{-a} + 2^{-1/a} = 2^{-a}(1+a^2)$, inegalitatea $f(a) \leq 1$ este echivalentă cu $1 \leq 2^a - a^2$.

Fie $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = 2^x - x^2$. Cum g este de două ori derivabilă şi $g''(x) = 2^x(\ln 2)^2 - 2 \leq 2\left((\ln 2)^2 - 1\right) \leq 0$, oricare ar fi x în $[0,1]$, rezultă că g este concavă, deci $g(x) = g((1-x)\cdot 0 + x \cdot 1) \geq (1-x)g(0) + xg(1) = 1$.

3. Fie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie care are proprietatea lui *Darboux*. Arătaţi că dacă f este injectivă pe mulţimea numerelor iraţionale, atunci f este continuă pe $\mathbb{R}$.

$* * *$

Soluţie. Vom arăta că f este injectivă pe $\mathbb{R}$. Atunci, cum f are proprietatea lui *Darboux*, f este (strict) monotonă şi, prin urmare, continuă.

Presupunem că f nu este injectivă. Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, astfel încât $f(a) = f(b)$. Cum în intervalul (a,b) există cel puţin două numere iraţionale, iar f este injectivă pe mulţimea numerelor iraţionale, există $c \in (a,b)$, astfel încât $f(c) \neq f(a)$. Fără să restrângem generalitatea, putem presupune că $f(c) > f(a)$.

Fie $A = (a,b) \cap \mathbb{Q}$. Cum A este numărabilă, rezultă că $f(A)$ este cel mult numărabilă, şi cum $(f(a), f(c))$ este nenumărabilă, rezultă că $(f(a), f(c)) \setminus f(A)$ este nevidă.

Fie $d \in (f(a), f(c)) \setminus f(A)$. Cum f are proprietatea lui *Darboux*, există $x_1 \in (a,c)$ şi $x_2 \in (c,b)$, astfel încât $f(x_1) = d = f(x_2)$. Din alegerea lui d, rezultă că x_1 şi x_2 sunt iraţionale, ceea ce contrazice injectivitatea lui f pe mulţimea numerelor iraţionale.

4. Fie n un număr întreg, $n \geq 2$, şi fie A o matrice din $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, astfel încât A şi A^2 să aibă ranguri diferite. Arătaţi că există o matrice nenulă B în $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, astfel încât $AB = BA = B^2 = O_n$.

* * *

Soluţie. Întrucât A şi A^2 au ranguri diferite, A este o matrice singulară nenulă.

Dacă $n = 2$, atunci $A^2 = (\mathrm{tr}A)A$, conform teoremei *Hamilton-Cayley*. Deoarece A şi A^2 au ranguri diferite, rezultă că $\mathrm{tr}A = 0$, deci $A^2 = O_2$ şi putem lua $B = A$.

Fie $n \geq 3$. Întrucât A este singulară, 0 este o valoare proprie a lui A.

Dacă toate valorile proprii ale lui A sunt nule, atunci A este nilpotentă, şi putem lua $B = A^k$, unde k este cel mai mare număr întreg pentru care A^k este nenulă.

Dacă A are şi valori proprii nenule, fie $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, unde $1 \leq m \leq n-1$, valorile sale proprii nenule (nu neapărat distincte) şi fie

$$f = X\prod_{i=1}^{m}(X - \lambda_i) = X^{m+1} + a_m X^m + \cdots + a_1 X,$$

unde $a_1 = (-1)^m \lambda_1 \cdots \lambda_m \neq 0$. Atunci $f(A) \neq O_n$, deoarece, în caz contrar, $\mathrm{rang}\, A = \mathrm{rang}\,(-a_1 A) = \mathrm{rang}\,(a_2 A^2 + \cdots + A^{m+1}) \leq \mathrm{rang}\, A^2 < \mathrm{rang}\, A$, contradicţie.

Fie f_A polinomul caracteristic al lui A. Conform teoremei *Hamilton-Cayley*, $f_A(A) = O_n$. Cum f este un factor al lui f_A şi $f(A) \neq O_n$, rezultă că $n = \deg\, f_A > \deg\, f = m + 1$. Deci

$A\prod_{i=1}^{m}(A - \lambda_i I_n) = f(A) \neq O_n$ şi $A^{n-m}\prod_{i=1}^{m}(A - \lambda_i I_n) = f_A(A) = O_n$.

Prin urmare, există un număr natural nenul $k < n - m$, astfel încât $A^k\prod_{i=1}^{m}(A - \lambda_i I_n) \neq O_n$ şi $A^{k+1}\prod_{i=1}^{m}(A - \lambda_i I_n) = O_n$. Evident, $B = A^k\prod_{i=1}^{m}(A - \lambda_i I_n)$ îndeplineşte condiţiile cerute în enunţul problemei.

Clasa a XII-a

1. Fie A un inel finit şi $a, b \in A$, cu proprietatea $(ab-1)b = 0$. Arătaţi că $b(ab-1) = 0$.

* * *

Soluţie. Egalitatea din ipoteză este echivalentă cu $ab^2 = b$, iar cea de demonstrat cu $bab = b$.

Observăm că dacă elementul b este idempotent (i.e., $b^2 = b$), atunci $bab = bab^2 = b \cdot b = b^2 = b$, iar dacă $b^m = b$, cu $m > 2$, atunci $bab = bab^m = bab^2 b^{m-2} = b \cdot b \cdot b^{m-2} = b^m = b$.

Astfel, este suficient să arătăm că există $m \geq 2$ cu proprietatea că $b^m = b$.

Inelul A fiind finit, există $1 \leq k < m$ numere naturale, cu k minim, cu proprietatea că $b^k = b^m$; arătăm că $k = 1$.

Dacă $k > 1$, atunci $ab^k = ab^m = ab^2 b^{m-2} = b^{m-1}$.

Dacă $k = 2$, rezultă că $b = ab^2 = b^{m-1}$, contrazicând minimalitatea.

Dacă $k > 2$, atunci $b^{k-1} = b \cdot b^{k-2} = ab^2 b^{k-2} = ab^k = b^{m-1}$, contrazicând de asemenea minimalitatea.

2. Fie $\mathcal{F}$ mulţimea funcţiilor continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care satisfac condiţia
$$e^{f(x)} + f(x) \geq x + 1,$$
pentru orice x număr real. Determinaţi valoarea minimă pe care o poate lua integrala
$$I(f) = \int_0^e f(x)\,\mathrm{d}x,$$
atunci când f parcurge $\mathcal{F}$.

Liviu Vlaicu, Zalău

Soluţie. Vom arăta că valoarea minimă este $\dfrac{3}{2}$.

Considerăm funcţia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = e^x + x - 1$. Aceasta este strict crescătoare şi continuă, cu $\mathrm{Im}(g) = \mathbb{R}$, deci inversabilă, cu inversa, de asemenea, continuă şi strict crescătoare.

Inegalitatea din enunţ se scrie sub forma $g(f(x)) \geq x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, de unde $f(x) \geq g^{-1}(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Cum $g^{-1} \in \mathcal{F}$, şi $I(f) \geq I\left(g^{-1}\right)$, $\forall\, f \in \mathcal{F}$, valoarea minimă este $I\left(g^{-1}\right)$.

Cu substituţia $t = g^{-1}(x)$, avem
$$I\left(g^{-1}\right) = \int_0^e g^{-1}(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 t g'(t)\,\mathrm{d}t = \left((t-1)e^t + \frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{3}{2}\,.$$

3. Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie integrabilă, iar $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale strict pozitive cu proprietatea $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

a) Dacă $A = \{m \cdot a_n |\, m, n \in \mathbb{N}^*\}$, arătaţi că orice interval deschis de numere strict pozitive conţine elemente din A.

b) Dacă, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ şi orice $x, y \in [a, b]$, cu $|x - y| = a_n$, are loc inegalitatea $\left|\int\limits_x^y f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq |x - y|$, arătaţi că
$$\left|\int\limits_x^y f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq |x - y|\,, \quad \forall x, y \in [a, b].$$

Nicolae Bourbăcuţ, Sarmizegetusa

Soluţie. a) Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, pentru orice $c, d > 0$, cu $c < d$, există $n \in \mathbb{N}^*$ cu $a_n < d - c$. Pentru $m = \left\lfloor \dfrac{c}{a_n} \right\rfloor + 1$ rezultă atunci că $m \cdot a_n \in (c, d) \cap A$.

b) Funcţia f fiind integrabilă, este mărginită. Fie $M > 0$, astfel încât $\operatorname{Im}(f) \subseteq [-M, M]$.

Fie $m, n \in \mathbb{N}^*$ fixate şi $x, y \in [a, b]$ cu $|x - y| = m \cdot a_n$. Arătăm că

$$\left| \int\limits_x^y f(t)\,\mathrm{d}t \right| \leq |x - y|\,.$$

Definim, pentru $k = \overline{0, m}$, numerele $z_k \in [a, b]$ prin

$$z_k = x + \frac{k}{m}(y - x) = \left(1 - \frac{k}{m}\right) x + \frac{k}{m} y.$$

Rezultă că $|z_k - z_{k-1}| = a_n$, pentru orice $k = \overline{1, m}$, şi

$$\begin{aligned} \left| \int\limits_x^y f(t)\,\mathrm{d}t \right| &= \left| \int\limits_{z_0}^{z_m} f(t)\,\mathrm{d}t \right| = \left| \sum_{k=1}^m \int\limits_{z_{k-1}}^{z_k} f(t)\,\mathrm{d}t \right| \leq \sum_{k=1}^m \left| \int\limits_{z_{k-1}}^{z_k} f(t)\,\mathrm{d}t \right| \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^m |z_k - z_{k-1}| = |x - y|. \end{aligned}$$

Fie acum $x, y \in [a, b]$ oarecare şi $d = |x - y|$. Pentru $d = 0$, inegalitatea cerută este evidentă. Presupunem în continuare $d > 0$. Cum A este densă în $[0, \infty)$, există un şir $(d_n)_{n\geq 1} \subset A$ cu proprietatea că $d_n \nearrow d$. Considerăm

$$y_n = x + \frac{d_n}{d}(y - x) = \left(1 - \frac{d_n}{d}\right) x + \frac{d_n}{d} y.$$

Atunci $y_n \in [a, b]$, $|y_n - x| \in A$ şi $y_n \to y$.

Rezultă că

$$\left| \int_{y_n}^y f(t)\,\mathrm{d}t \right| \leq M \cdot |y - y_n| \longrightarrow 0.$$

Obţinem atunci că

$$\begin{aligned} \left| \int\limits_x^y f(t)\,\mathrm{d}t \right| &= \left| \int\limits_x^{y_n} f(t)\,\mathrm{d}t + \int\limits_{y_n}^y f(t)\,\mathrm{d}t \right| \leq \left| \int\limits_x^{y_n} f(t)\,\mathrm{d}t \right| + \left| \int_{y_n}^y f(t)\,\mathrm{d}t \right| \\ &\leq |x - y_n| + \left| \int_{y_n}^y f(t)\,\mathrm{d}t \right|. \end{aligned}$$

Trecând la limită în ultima inegalitate, obţinem inegalitatea cerută.

4. Pentru $k \in \mathbb{Z}$ definim polinomul $F_k = X^4 + 2(1-k)X^2 + (1+k)^2$. Să se determine toate valorile $k \in \mathbb{Z}$, astfel încât F_k să fie ireductibil peste $\mathbb{Z}$ şi reductibil peste $\mathbb{Z}_p$, pentru orice p prim.

Marius Vlădoiu, Bucureşti

Soluţie. Vom arăta că numerele care satisfac condiţia cerută sunt toate numerele $k \in \mathbb{Z}$ care nu sunt de forma $\pm l^2$, cu $l \in \mathbb{Z}$. Arătăm că F_k este reductibil peste $\mathbb{Z}$ dacă şi numai dacă F_k se descompune ca produs de două polinoame monice de grad 2.

Într-adevăr, dacă F_k are o rădăcină întreagă m, atunci:
a) dacă $m = 0$, atunci $k = -1$, şi $F_{-1} = X^2(X^2+4)$;
b) dacă $m \neq 0$, atunci $-m$ este de asemenea rădăcină şi $X^2 - m^2$ divide F_k.

Deci F_k este reductibil peste $\mathbb{Z}$ dacă şi numai dacă

$$F_k = (X^2 + aX + b)(X^2 + cX + d),$$

cu $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$.

Prin identificarea coeficienţilor, avem că $a + c = 0$, $ac + b + d = 2(1-k)$, $ad + bc = 0$ şi $bd = (1+k)^2$.

Dacă $a = 0$, atunci $c = 0$, $b + d = 2(1-k)$, $bd = (1+k)^2$, de unde obţinem $(b-d)^2 = 4(1-k)^2 - 4(1+k)^2 = -16k$, astfel că $k = -l^2$, cu $l \in \mathbb{Z}$.

Dacă $a \neq 0$, atunci $c = -a$, $b = d$, $b^2 = (1+k)^2$, $2b - a^2 = 2(1-k)$.

Dacă $b = -1-k$, rezultă $a^2 = -4$, imposibil. Deci $b = 1+k$ şi $a^2 = 4k$, de unde $k = l^2$, cu $l \in \mathbb{Z}$.

Prin urmare, F_k este reductibil peste $\mathbb{Z}$ dacă şi numai dacă $k = \pm l^2$, cu $l \in \mathbb{Z}$. Arătăm că F_k este reductibil peste $\mathbb{Z}_p$ cu p prim, pentru orice $k \in \mathbb{Z}$. Pentru $p = 2$ avem că $F_k = X^4$ sau $F_k = X^4 + \widehat{1} = (X + \widehat{1})^4$, deci F_k este reductibil. Fie p număr prim impar. Putem presupune că $k \not\equiv 0 \pmod{p}$ şi $k \not\equiv -1 \pmod{p}$. Ca mai sus, F_k este reductibil peste $\mathbb{Z}_p$ dacă şi numai dacă

$$F_k = \left(X^2 + \widehat{a}X + \widehat{b}\right)\left(X^2 + \widehat{c}X + \widehat{d}\right),$$

cu $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, care verifică condiţiile $a + c \equiv 0 \pmod{p}$, $ac + b + d \equiv 2(1-k) \pmod{p}$, $ad + bc \equiv 0 \pmod{p}$ şi $bd \equiv (1+k)^2 \pmod{p}$.

Dacă $a \equiv 0 \pmod{p}$, avem că $c \equiv 0 \pmod{p}$ şi $(b-d)^2 \equiv -16k \pmod{p}$, (1). Dacă $a \not\equiv 0 \pmod{p}$, atunci $c \equiv -a \pmod{p}$, $b \equiv d \pmod{p}$, $b^2 \equiv (1+k)^2 \pmod{p}$ şi $2b - a^2 \equiv 2(1-k) \pmod{p}$.

Pentru $b \equiv -1-k \pmod{p}$ avem că $a^2 \equiv -4 \pmod{p}$, (2).

Pentru $b \equiv 1+k \pmod{p}$ avem că $a^2 \equiv 4k \pmod{p}$, (3).

Cum $-16k = -4 \cdot 4k$, cel puţin unul dintre elementele $-\sphericalangle 16k$, $-\widehat{4}$ şi $\sphericalangle 4k$ este rest pătratic modulo p, astfel că cel puţin una dintre ecuaţiile (1), (2) sau (3) are soluţii.

Cum $F_k = (X^2 + (1-k))^2 - (-16k) = (X^2 - (1+k))^2 - (-4)X^2 = (X^2 + (1+k)) - (4k)X^2$, rezultă că F_k este reductibil peste $\mathbb{Z}_p$, pentru orice $k \in \mathbb{Z}$.

Lista premianţilor

Clasa a V-a: Premiul I: *Unguroiu Răzvan* C.N. „Preparandia D. Ţichindeal“, Arad), *Ipate Elisa* (Lic. Teoretic Internaţional de Informatică, Bucureşti); **Premiul al II-lea:** *Stan Ionuţ Gabriel* (Lic. Teoretic Internaţional de Informatică, Bucureşti); **Premiul al III-lea** *Bartazágoni Csongor* (Lic. Teoretic „Bolyai Farkas“, Tg. Mureş), *Stoleriu Radu-Ionuţ* (C.N. „Emil Racoviţă“, Iaşi), *Jurca Tudor* (Lic. Teoretic „Grigore Moisil“, Timişoara); **Menţiuni:** *Iordan Mihnea Ionuţ* (Lic. Teoretic Internaţional de Informatică, Bucureşti), *Năstase Antonia Maria* (Lic. Teoretic Internaţional de Informatică, Bucureşti), *Popa Luca Teodor* (C.N. „I. Minulescu“. Slatina, Olt), *Ştefan Ioan* (C.N. „Grigore Moisil“ Bucureşti), *Dumitrescu Adriana Nicoleta* (Şc. Gimn. „Spectrum“, Constanţa, *Dumitrescu Ştefan-Ionel* (C.N. „Dr. Ioan Meşotă“, Braşov), *Mîrzac Teia Gabriela* (Şc. Gimn. „Spectrum“, Constanţa) *Nicu Alexandru Cristian* (Lic. Teoretic Internaţional de Informatică, Bucureşti) , *Luchian Cristian* (Şc. Gimn. Nr.3, Piatra Neamţ), *Stănoiu Ioana* (C.N. „Gr. Moisil“, Bucureşti), *Şerban Radu George* (C.N. „Unirea“, Tg. Mureş), *Buruiană Andrei* (C.N., Iaşi), *Benescu Alexandru Andrei* (C.N. de Informatică „Tudor Vianu“, Bucureşti).

Clasa a VI-a: Premiul I: *Anghel David Andrei* (Şc. Gimn. Nr. 56 Bucureşti); **Premiul al II-lea:** *Robu Dacian* (C.N. „V. Lucaciu“, Baia Mare), *Mirică Ioan Alexandru* (Lic. Teoretic Internaţional de Informatică, Bucureşti); **Premiul al III-lea:** *Vasile Octavian* (Lic. Teoretic Internaţional de Informatică, Bucureşti); **Menţiuni:** *Cîrligeanu Adela* (C.N. de Informatică „Tudor Vianu“, Bucureşti), *Curea Alexandra-Maria* (C.N. „Dr. I. Meşotă“, Braşov), *Füredi Eduard Andrei* (C.N. „E. Racoviţă“, Iaşi), *Lazăr Alexandru Florin* (C.N. „Emil Racoviţă“, Cluj -Napoca), *Pîrvulescu Gabriela Mădălina* (Şc. Gimn., Craiova), *Turbincă Gabriel* (C.N. „Emil Racoviţă“, Iaşi), *Velicu Alexandru Ştefan* (Lic. Teoretic Internaţional de Informatică, Bucureşti), *David Silviu Ionuţ* (C.N. de Informatică „Matei Basarab“, Râmnicu Vâlcea), *Pătru Mihai Cosmin* (C.N. „Carol I“, Craiova), *Mirea-Bulubaşa Petre-Luca* (Şc. Gimn. Nr.4, Râmnicu Vâlcea), *Degeratu Clara Maria* (Lic. Teoretic Internaţional de Informatică, Bucureşti), *Nistor Anne-Marie-Denisa* (C.N. „Mircea cel Bătrân“, Constanţa), *Zaharia Mara Ioana* (C.N. „V. Alecsandri“, Galaţi), *Popa Alexandru* (C.N. de Informatică „Tudor Vianu“, Bucureşti), *Zamfirescu Luca Vlad* (Lic. Teoretic Internaţional de Informatică, Bucureşti), *Constantinescu Daniel* (Şc. Gimn. „Coresi“, Târgovişte), *Popescu Mihnea Eduard-Ştefan* (Şc. Gimn. Nr.3, Slobozia, Ialomiţa), *Gridan Antonia Camelia* (C.N. „A. Vlaicu“, Orăştie), *Popa Diana Alexandra* (Lic. Teoretic Internaţional de Informatică Bucureşti).

Clasa a VII-a: Premiul I: *Lecoiu Radu Andrei* (C.N. „Ienăchiţă Văcărescu“, Târgovişte); **Premiul al II-lea:** *Moldovan Andrei* (Şc. Gimn. Nr.79 Bucureşti); **Premiul al III-lea:** *Răduţ Alexia Andreea* (Şc. Gimn.

„Mircea Eliade“, Craiova), *Gheorghe Luca Andrei* (Lic. Teoretic Internaţional de Informatică, Bucureşti); **Menţiuni:** *Rîşnoveanu Lucia* (Şc. Gimn. „Spectrum“, Constanţa), *Slănină Iulia* (C.N. de Informatică „Tudor Vianu“, Bucureşti), *Constantin escu Iustinian Cristian* (Şc. Gimn. „George Bacovia“, Bucureşti), *Monea Dragoş Gabriel* (C.N. „Decebal“, Deva), *Pană Luca* (Sc, Gimn. „Cpt. Av. Mircea T. Bădulescu“, Buzău), *Dumitrescu Matei-Pavel* (Colegiul Naţional, Iaşi), *Dumitriu Marian* (C.N. „Gheorghe Şincai“, Baia Mare), *Cavaşi Eduard Paul* (C.N. „Emil Racoviţă“, Cluj - Napoca), *Neacşu Miruna* (Lic. Teoretic Internaţional de Informatică, Bucureşti), *Buhnia Tudor Alexandru* (Lic. Teoretic Internaţional de Informatică, Bucureşti).

Clasa a VIII-a: Premiul I: *Ţolu Diana* (Şc. Gimn. „Eugen Ionescu“, Slatina, Olt); **Premiul al II-lea**: *Abibula Aisel* (Şc. Gimn.]g Spectrum“, Constanţa); **Premiul al III-lea:** *Bogdan Ana Maria Iulia* (Şc. Gimn. „Şerban Cioculescu“, Găeşti), *Ariton Adrian* (C.N. „Unirea“, Focẓani); **Menţiuni:** *Popescu Ioana* (Lic. Teoretic Scoala Europeana, Bucureşti), *Polenciuc Rareş* (C.N. „Roman Vodă“, Roman), *Lefter Lucia-Maria* (C.N. „Costache Negruzzi“, Iaşi), *Costea Teodora* (Şc. Gimn. „Spectrum“, Constanţa), *Hudişteanu Mihaela* (C.N. „Emil Racoviţă“, Iaşi), *Mercan Horia* (Şc. Gimn. Nr.81 Bucureşti), *Harambas Diana* (C.N.„Emil Racoviţă“, Cluj -Napoca), *Zlampareţ George* (C.N. „Gheorghe Şincai“, Baia Mare), *Gasan Carol Luca* (Lic. Teoretic Internaţional de Informatică, Bucureşti), *Axenie Raisa* (C.N. de Informatică „Tudor Vianu“, Bucureşti), *Coman Alexandru Sergiu* (Şc. Gimn. Nr. 56 Bucureşti), *Coman Mihnea George* (Lic. Teoretic Internaţional de Informatică, Bucureşti), *Ignuţa Ciuncanu Iasmina-Ioana* (C.N. de Informatică „Tudor Vianu“, Bucureşti), *Păunescu Alexia Ioana* (Lic. Teoretic Internaţional de Informatică, Bucureşti), *Stoica George-Ioan* (C.N. „Costache Negruzzi“, Iaşi), *Strugariu Ştefan - Vladimir* (Colegiul Naţional, Iaşi), *Garaiman Andres* (Şc. Gimn. „Ion Pillat“, Piteşti).

Clasa a IX-a: Premiul I: *Cardaş Tudor Darius* (C.N. „A.T. Laurian“, Botoşani); **Premiul al II-lea:** *Mărginean Andrei* (Lic. Teoretic Internaţional de Informatică, Bucureşti), *Parfeni Andrei Alexandru* (Lic. Teoretic Internaţional de Informatică, Bucureşti); **Premiul al III-lea:** *Gîrban Alexandru* (Liceul Teoretic Internaţional de Informatică, Constanţa); **Menţiuni:** *Tran Bach Nguyen* (Liceul Teoretic Internaţional de Informatică, Bucureşti), *Vergelea Vlad Ştefan* (Liceul Teoretic Internaţional de Informatică, Constanţa), *Tănăsescu Alexandru* (C.N. „Mihai Viteazul“, Ploiesti), *Badea Andrada Georgiana* (C.N. „Nicolae Bălcescu“, Brăila), *Donciu Mircea* (Liceul Teoretic Internaţional de Informatică, Bucureşti), *Băltoi Teodor Ioan* (C.N. „Roman Vodă“, Roman), *Popa Mocanu Maria Sofia* (Liceul Teoretic Internaţional de Informatică, Bucureşti), *Abu Shanab Amina* (Liceul Teoretic Internaţional de Informatică, Bucureşti), *Ştefan Mihai* (Liceul Teoretic Internaţional de Informatică, Bucureşti), *Chiriac Andreea* (C.N. „Mircea cel Bătrân“, Constanţa), *Vasile Marian Daniel* (C.N. Pedagogic „Ştefan Odobleja“ Drobeta Turnu Severin), *Daniel Medeea* (Liceul Teoretic Internaţional de Informatică, Bucureşti).

Clasa a X-a: Premiul I: *Memiş Edis* (Liceul Teoretic Internaţional de Informatică, Constanţa), *Nicolcea Horia-Paul* (C.N. „Dimitrie Cantemir“, Oneşti, Bacău), *Novac Sergiu* (C.N. „C. Brediceanu“, Lugoj, Timiş), *Bălan-Tribus Leon Roland* (Liceul Teoretic Internaţional de Informatică, Bucureşti); **Premiul al II-lea:** *Robu Vlad Nicolae* (C.N. „Vasile Lucaciu“, Baia Mare), *Timofte Alexandra* (C.N. de Informatică „Tudor Vianu“, Bucureşti), *Iacob Radu* (Liceul Teoretic Internaţional de Informatică Bucureşti); **Premiul al III-lea:** *Ile George Daniel* (C.N. „Emil Racoviţă“, Cluj-Napoca), *Georgescu Ilinca* (Liceul Teoretic Internaţional de Informatică, Bucureşti); **Menţiuni:** *Teodorescu Antonio* (Liceul Teoretic Internaţional de Informatică, Bucureşti), *Boroica Adrian* (C.N. „Gheorghe Şincai“, Baia Mare), *Picu George* (Liceul Teoretic Internaţional de Informatică, Bucureşti), *Chiriţă Denis* (Liceul Teoretic Internaţional de Informatică, Bucureşti), *Becsi Paul* (C.N. „Gheorghe Şincai“, Baia Mare), *Târziu Nichita* (Liceul Teoretic Internaţional de Informatică, Bucureşti), *Sucaliuc Vlad* (Liceul Teoretic Internaţional de Informatică, Bucureşti).

Clasa a XI-a: Premiul I: *Iliant Theodor Mihai* (C.N. „Mircea cel Bătrân“, Constanţa); **Premiul al II-lea:** *Dumitrescu Dan* (Liceul Teoretic Internaţional de Informatică, Bucureşti); **Premiul al III-lea:** *Tuchiluş Vlad* (C.N. „Costache Negruzzi“, Iaşi); **Menţiuni:** *Crişan Dragoş* (C.N. „Emil Racoviţă“, Cluj -Napoca), *Dima Clara-Maria* (Liceul Teoretic Internaţional de Informatică, Bucureşti), *Ilie Alexandru-Gabriel* (C.N. „Mihai Viteazul“, Ploieşti), *Deac Alex* (Liceul Teoretic Internaţional de Informatică, Bucureşti), *Bercaru Ana Teodora* (Liceul Teoretic Internaţional de Informatică, Bucureşti), *Tîrlişan Paul Petru* (C.N. „George Coşbuc“, Năsăud), *Badea Alexandru* (Liceul Teoretic Internaţional de Informatică, Bucureşti), *Dumitru Cătălin* (C.N. „B.P. Haşdeu“, Buzău), *Matei Bledea Alexandru* (C.N. „Gheorghe Şincai “, Baia Mare), *Drăghici Răzvan-Andrei* (C.N.„Fraţii Buzezti“, Craiova), *Péter István* (C.N. „Márton Áron“, Miercurea Ciuc), *Morariu Răzvan-Andrei* (C.N.„Costache Negruzzi“, Iaşi), *Mircea Andra Alena* (C.N. „Unirea“, Focşani), *Ignat Andrei Horia* (C.N. „Ion Minulescu“, Slatina).

Clasa a XII-a: Premiul I: *Bonciocat Ciprian Mircea* (Colegiul Naţional de Informatică „Tudor Vianu“, Bucureşti), *Doica Mihnea Gabriel* (Liceul Teoretic Internaţional de Informatică Bucureşti); **Premiul al II-lea:** *Ocian Mihnea* (C.N. de Informatică „Tudor Vianu“, Bucureşti), *Bosinta Alexandru Andrei* (Liceul Teoretic Internaţional de Informatică Bucureşti), **Premiul al III-lea:** *Bâra Andrei Robert* (Liceul Teoretic Internaţional de Informatică, Constanţa) *Blaga Bogdan* (C.N. „Al. Papiu Ilarian“, Tg. Mureş), *Nicolae Ioan Andrei* (Liceul Teoretic Internaţional de Informatică Bucureşti). **Menţiuni:** *Dima Andreea*)Colegiul Naţional de Informatică „Tudor Vianu“, Bucureşti), *Vlad Raluca* (Liceul Teoretic „Grigore Moisil“, Timişoara), *Popa Ştefan Cristian* (Liceul Teoretic Internaţional de Informatică Bucureşti), *Simion Elena Teodora* (Colegiul Naţional „I.C. Brătianu“ Piteşti), *Bălăucă Ştefan Răzvan* (C.N. „Mihai Eminescu“ Botoşani), *Tenie Anda* (C.N. „Al. Papiu Ilarian“, Tg. Mureş. *Ficiu Bogdan* (Liceul Teoretic Internaţional de Informatică Bucur Bucureşti), *Mustăţea Radu Ioan* (Liceul Teoretic Internaţional de Informatică Bucureşti), *Dondera Alin* (Liceul Teoretic Internaţional de Informatică Bucureşti), *Bichir Dan-Victor* (Liceul Teoretic Internaţional de Informatică Bucureşti).

A 69-A OLIMPIADĂ NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
Faza judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 10 martie 2018

prezentare de MIHAIL BĂLUNĂ[1)]

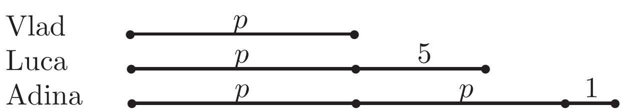
Clasa a V-a

1. Vlad, Luca şi Adina au cumpărat de la o librărie rechizite în valoare totală de 118 lei. Vlad a cumpărat 5 pixuri, 4 caiete şi 3 cutii cu creioane colorate, Luca a cumpărat 7 pixuri, 3 caiete şi 4 cutii cu creioane colorate, iar Adina a cumpărat 8 pixuri, 7 caiete şi 7 cutii cu creioane colorate.

Ştiind că Luca a plătit cu 5 lei mai mult decât Vlad, iar Adina cu 4 lei mai puţin decât Vlad şi Luca la un loc, aflaţi cât costă un creion, cât costă un caiet şi cât costă o cutie cu creioane colorate.

* * *

Soluţie. Folosim metoda grafică pentru a afla sumele plătite de fiecare copil. În reprezentarea de mai jos, p este suma plătită de Vlad:



Avem $p + p + 5 + 2p + 1 = 118$, de unde $p = 28$, deci Vlad a plătit 28 de lei, Luca a plătit 33 de lei, iar Adina 57 de lei.

Folosim metoda comparaţiei pentru a afla preţul fiecărui tip de rechizite:

5 pixuri . . . 4 caiete . . . 3 cutii cu creioane . . . 28 lei
7 pixuri . . . 3 caiete . . . 4 cutii cu creioane . . . 33 lei
8 pixuri . . . 7 caiete . . . 7 cutii cu creioane . . . 57 lei

Din primele două relaţii obţinem prin adunare

12 pixuri . . . 7 caiete . . . 7 cutii cu creioane . . . 61 lei

Comparând cu a treia relaţie şi efectuând diferenţa, obţinem că 4 pixuri costă 4 lei, deci un pix costă 1 leu

Înlocuind în primele două relaţii, obţinem:

[1)]Profesor, Colegiul Naţional „Mihai Viteazul”, Bucureşti.