PENTRU CERCURILE DE ELEVI

ASUPRA UNEI INEGALITĂŢI

Florin Rotaru[1)]

Inspiraţi de inegalitatea

$$\frac{a^3}{x}+\frac{b^3}{y}+\frac{c^3}{z}\geq\frac{(a+b+c)^3}{3(x+y+z)},$$

unde $a,b,c,x,y,z>0$ (problemă dată la a XVI-a Olimpiadă Ibero-Americană de Matematică, 2001), vom analiza în cele ce urmează relaţia din lema următoare.

Lemă. *Fie* $n,p\in\mathbb{N}^*$, $p\geq 2$. *Fie* $a_1,a_2,\ldots,a_n\geq 0$ *şi* $b_1,b_2,\ldots,b_n>0$. *Are loc inegalitatea*

$$\frac{a_1^p}{b_1}+\frac{a_2^p}{b_2}+\ldots+\frac{a_n^p}{b_n}\geq\frac{(a_1+a_2+\ldots+a_n)^p}{n^{p-2}(b_1+b_2+\ldots+b_n)}.$$

Demonstraţie. Aplicăm inegalitatea lui *Hölder* în forma următoare:

Dacă $m,n\in\mathbb{N}^*$ *şi considerăm numerele reale* $a_{ij}\geq 0, i=\overline{1,n}, j=\overline{1,m}$, $c_i\geq 0, i=\overline{1,n}$, $\alpha_j>0, j=\overline{1,m}$ *astfel încât* $\frac{1}{\alpha_1}+\ldots+\frac{1}{\alpha_m}=1$, *atunci*

$$\prod_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}c_i a_{ij}^{\alpha_j}\right)^{1/\alpha_j}\geq\sum_{i=1}^{m}c_i a_{i1}a_{i2}\ldots a_{in}.$$

Luând $m=p$, $c_1=c_2=\ldots=c_n=1$, $a_{1j}=\frac{a_j^p}{b_j}, j=\overline{1,n}$, $a_{2j}=b_j$, $j=\overline{1,n}$, $a_{ij}=1, i=\overline{3,p}, j=\overline{1,n}$ şi $\alpha_j=p, j=\overline{1,p}$ obţinem

$$\left(\frac{a_1^p}{b_1}+\frac{a_2^p}{b_2}+\ldots\frac{a_n^p}{b_n}\right)^{1/p}(b_1+b_2+\ldots+b_n)^{1/p}\cdot(n^{p-2})^{1/p}\geq a_1+a_2+\ldots+a_n,$$

de unde rezultă imediat concluzia. □

Corolar. *Dacă* $a,b,c\geq 0$ *şi* $x,y,z>0$, *atunci*

$$\frac{a^4}{x}+\frac{b^4}{y}+\frac{c^4}{z}\geq\frac{(a+b+c)^4}{9(x+y+z)}.$$

Demonstraţie[2)]. Aplicăm lema precedentă pentru $p=4$ şi $n=3$. □

[1)] Matematician, Focşani

[2)] **Nota redacţiei.** Corolarul poate fi demonstrat şi folosind inegalitatea C-B-S:

$$(x+y+z)\left(\frac{a^4}{x}+\frac{b^4}{y}+\frac{c^4}{z}\right)\geq\left(\sqrt{x}\frac{a^2}{\sqrt{x}}+\sqrt{y}\frac{b^2}{\sqrt{y}}+\sqrt{z}\frac{c^2}{\sqrt{z}}\right)^2=(a^2+b^2+c^2)^2\geq$$

$$\geq\left(\frac{1}{3}(a+b+c)^2\right)^2=\frac{1}{9}(a+b+c)^4.$$

Aplicaţii

A1) Dacă x, y, z sunt numere reale strict pozitive astfel încât $xyz = 1$, să se arate că
$$\frac{x^4}{y+z} + \frac{y^4}{z+x} + \frac{z^4}{x+y} \geq \frac{3}{2}.$$

Soluţie. Conform corolarului avem
$$\frac{x^4}{x+y} + \frac{y^4}{z+x} + \frac{z^4}{x+y} \geq \frac{(x+y+z)^4}{18(x+y+z)} = \frac{(x+y+z)^3}{18} \geq \frac{(3\sqrt[3]{xyz})^3}{18} =$$
$$= \frac{27xyz}{18} = \frac{27}{18} = \frac{3}{2}.$$

A2) Fie a, b, c numere reale strict pozitive astfel încât $abc = 1$. Să se arate că
$$\frac{1}{a^4(b+c)} + \frac{1}{b^4(c+a)} + \frac{1}{c^4(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

Soluţie. Avem, conform ipotezei şi corolarului,
$$\frac{1}{a^4(b+c)} + \frac{1}{b^4(c+a)} + \frac{1}{c^4(a+b)} = \frac{b^4c^4}{b+c} + \frac{c^4a^4}{c+a} + \frac{a^4b^4}{a+b} \geq \frac{(ab+bc+ca)^4}{18(a+b+c)}.$$

Avem apoi, oricare ar fi a, b, c,
$$abc(a+b+c) \leqslant \frac{(ab+bc+ca)^2}{3}.$$

Deci,
$$\frac{(ab+bc+ca)^4}{18(a+b+c)} \geq \frac{9a^2b^2c^2(a+b+c)^2}{18(a+b+c)} = \frac{9(a+b+c)}{18} \geq \frac{9 \cdot 3\sqrt[3]{abc}}{18} = \frac{3}{2}.$$

A3) Dacă $a, b, c \in (0, +\infty)$ cu $a + b + c = 1$, să se arate că
$$\frac{(a+b)^4}{c+1} + \frac{(b+c)^4}{a+1} + \frac{(c+a)^4}{b+1} \geq \frac{4}{9}.$$

Soluţie. Aplicăm corolarul şi avem
$$\frac{(a+b)^4}{c+1} + \frac{(b+c)^4}{a+1} + \frac{(c+a)^4}{b+1} \geq \frac{[2(a+b+c)]^4}{9(a+b+c+3)} = \frac{16}{4 \cdot 9} = \frac{4}{9}.$$

A4) Dacă $x, y, z > 0$ şi $m \geq 0$, să se arate că
$$\frac{(x+y)^4}{x+y+mz} + \frac{(y+z)^4}{mx+y+z} + \frac{(z+x)^4}{x+my+z} \geq \frac{16(x+y+z)^3}{9(m+2)}.$$

Soluţie. Conform corolarului rezultă
$$\frac{(x+y)^4}{x+y+mz} + \frac{(y+z)^4}{mx+y+z} + \frac{(z+x)^4}{x+my+z} \geq$$
$$\geq \frac{[2(x+y+z)]^4}{9(m+2)(x+y+z)} = \frac{16(x+y+z)^3}{9(m+2)}.$$

A5) (O.M. Irlanda, 1999) Dacă $a, b, c > 0$, să se arate că

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\geq\frac{9}{2(a+b+c)}.$$

Soluţie. Conform corolarului avem

$$\frac{1^4}{a+b}+\frac{1^4}{b+c}+\frac{1^4}{c+a}\geq\frac{(1+1+1)^4}{9\cdot 2(a+b+c)}=\frac{81}{9\cdot 2(a+b+c)}=\frac{9}{2(a+b+c)}.$$

A6) (O.M. Belarus, 1999) Dacă a, b, c sunt numere reale cu proprietatea că $a^2+b^2+c^2=3$, să se arate că

$$\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+bc}+\frac{1}{1+ca}\geq\frac{3}{2}.$$

Soluţie. Aplicând corolarul avem

$$\frac{1^4}{1+ab}+\frac{1^4}{1+bc}+\frac{1^4}{1+ca}\geq\frac{(1+1+1)^4}{9(3+ab+bc+ca)}\geq\frac{81}{9(3+a^2+b^2+c^2)}=\frac{3}{2}.$$

A7) (R.M.T. nr. 1/2014) Dacă x, y, z sunt trei numere reale strict pozitive, arătaţi că

$$\frac{x^4}{yz}+\frac{y^4}{zx}+\frac{z^4}{xy}\geq xy+yz+zx.$$

Soluţie. Folosind corolarul avem

$$\frac{x^4}{yz}+\frac{y^4}{zx}+\frac{z^4}{xy}\geq\frac{(x+y+z)^4}{9(xy+yz+zx)}\geq$$

$$\geq\frac{(x+y+z)^4}{9\dfrac{(x+y+z)^2}{3}}=\frac{(x+y+z)^2}{3}\geq xy+yz+zx.$$

A8) Fie $a, b, c \in (0, +\infty)$. Să se demonstreze că

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{16}{c}\geq\frac{256}{9(a+b+c)}.$$

Soluţie. Aplicând corolarul avem

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{16}{c}\geq\frac{(1+1+2)^4}{9(a+b+c)}=\frac{256}{9(a+b+c)}.$$

A9) Fie $x, y, z > 0$. Să se demonstreze că

$$\frac{x^4}{y}+\frac{y^4}{z}+\frac{z^4}{x}\geq\frac{(x+y+z)^3}{9}.$$

Soluţie Folosind corolarul avem

$$\frac{x^4}{y}+\frac{y^4}{z}+\frac{z^4}{x}\geq\frac{(x+y+z)^4}{9(x+y+z)}=\frac{(x+y+z)^3}{9}.$$

A10) Fie a, b, c laturile unui triunghi. Să se arate că are loc inegalitatea

$$\frac{a^4}{b+c-a}+\frac{b^4}{c+a-b}+\frac{c^4}{a+b-c}\geq\frac{(a+b+c)^3}{9}.$$

Soluţie. Aplicând corolarul avem

$$\frac{a^4}{b+c-a}+\frac{b^4}{c+a-b}+\frac{c^4}{a+b-c}\geq\frac{(a+b+c)^4}{9(a+b+c)}=\frac{(a+b+c)^3}{9}.$$

A11) Fie $a, b, c > 1$. Să se demonstreze că

$$\frac{\log_a^4 b}{a}+\frac{\log_b^4 c}{b}+\frac{\log_c^4 a}{c}\geq\frac{9}{a+b+c}.$$

Soluţie. Aplicând corolarul rezultă

$$\frac{\log_a^4 b}{a}+\frac{\log_b^4 c}{b}+\frac{\log_c^4 a}{c}\geq\frac{(\log_a b+\log_b c+\log_c a)^4}{9(a+b+c)}\geq$$

$$\geq\frac{\left(3\sqrt[3]{\log_a b\log_b c\log_c a}\right)^4}{9(a+b+c)}=\frac{3^4}{9(a+b+c)}=\frac{81}{9(a+b+c)}=\frac{9}{a+b+c}.$$

A12) Dacă a, b, c sunt laturile unui triunghi, să se arate că

$$\frac{(a+b-c)^4}{c^2+2ab}+\frac{(b+c-a)^4}{a^2+2bc}+\frac{(c+a-b)^4}{b^2+2ca}\geq\frac{ab+bc+ca}{3}.$$

Soluţie. Folosind corolarul avem

$$\frac{(a+b-c)^4}{c^2+2ab}+\frac{(b+c-a)^4}{a^2+2bc}+\frac{(c+a-b)^4}{b^2+2ca}\geq\frac{(a+b+c)^4}{a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca}=$$

$$=\frac{(a+b+c)^4}{9(a+b+c)^2}=\frac{(a+b+c)^2}{9}\geq\frac{ab+bc+ca}{3}.$$

A13) (S.G.M. 4/2013 - *A. Eckstein*) Arătaţi că dacă $a, b, c > 0$, atunci

$$\frac{a^4+b^4}{c}+\frac{b^4+c^4}{a}+\frac{c^4+a^4}{b}\geq\frac{2(a+b+c)^3}{9}.$$

Soluţie. Avem

$$\frac{a^4+b^4}{c}+\frac{b^4+c^4}{a}+\frac{c^4+a^4}{b}=\frac{a^4}{c}+\frac{b^4}{a}+\frac{c^4}{b}+\frac{b^4}{c}+\frac{c^4}{a}+\frac{a^4}{b},$$

aplicăm corolarul şi avem

$$\left(\frac{a^4}{c}+\frac{b^4}{a}+\frac{c^4}{b}\right)+\left(\frac{b^4}{c}+\frac{c^4}{a}+\frac{a^4}{b}\right)\geq$$

$$\geq\frac{(a+b+c)^4}{9(a+b+c)}+\frac{(a+b+c)^4}{9(a+b+c)}=\frac{2(a+b+c)^4}{9(a+b+c)}=\frac{2(a+b+c)^3}{9}.$$

A14) (Concursul interjudeţean „Matematica de drag“, Bistriţa 2010) Dacă $x, y, z \in (0, +\infty)$, arătaţi că

$$(x+2y)^4+(y+2z)^4+(z+2x)^4\geq 3(x+y+z)^4.$$

Soluţie. Aplicăm corolarul:

$$\frac{(x+2y)^4}{1}+\frac{(y+2z)^4}{1}+\frac{(z+2x)^4}{1}\geq$$

$$\geq\frac{(3(x+y+z))^4}{9(1+1+1)}=\frac{81(x+y+z)^4}{27}=3(x+y+z)^4.$$

A15) Fie $n,p\geq 2$, $n,p\in\mathbb{N}$, $a_1,a_2,\ldots,a_n>0$ şi $a_1+a_2+\ldots+a_n=1$. Să se arate că

$$\frac{a_1^p}{a_1+a_2}+\frac{a_2^p}{a_2+a_3}+\ldots\frac{a_n^p}{a_n+a_1}\geq\frac{1}{2n^{p-2}}.$$

Soluţie. Aplicând lema avem

$$\frac{a_1^p}{a_1+a_2}+\frac{a_2^p}{a_2+a_3}+\ldots\frac{a_n^p}{a_n+a_1}\geq\frac{(a_1+a_2+\ldots+a_n)^p}{2n^{p-2}(a_1+a_2+\ldots+a_n)}$$

$$=\frac{(a_1+a_2+\ldots+a_n)^{p-1}}{2n^{p-2}}=\frac{1}{2n^{p-2}}.$$

A16) Fie $n,p\geq 2$, $n,p\in\mathbb{N}$ şi $a_1,a_2,\ldots,a_n>0$, cu $a_1+a_2+\ldots+a_n=n$. Să se arate că

$$\frac{(a_1+a_2)^p}{a_1+1}+\frac{(a_2+a_3)^p}{a_2+1}+\ldots+\frac{(a_n+a_1)^p}{a_n+1}\geq 2^{p-2}n.$$

Soluţie. Folosind lema avem

$$\frac{(a_1+a_2)^p}{a_1+1}+\frac{(a_2+a_3)^p}{a_2+1}+\ldots+\frac{(a_n+a_1)^p}{a_n+1}\geq\frac{(2(a_1+a_2+\ldots+a_n))^p}{n^{p-2}(a_1+a_2+\ldots+a_n+n)}$$

$$=\frac{2^pn^p}{n^{p-2}2n}=\frac{2^{p-1}n^2}{n}=2^{p-2}n.$$

A17) Fie $n,p\geq 2$, $n,p\in\mathbb{N}$, $a_1,a_2,\ldots,a_n>0$ şi $b_1,b_2,\ldots,b_n>0$, $a_1a_2\ldots a_n=1$, $b_1+b_2+\ldots+b_n=1$. Să se arate că

$$\frac{a_1^p}{b_1}+\frac{a_2^p}{b_2}+\ldots+\frac{a_n^p}{b_n}\geq n^2.$$

Soluţie. Aplicând lema avem

$$\frac{a_1^p}{b_1}+\frac{a_2^p}{b_2}+\ldots+\frac{a_n^p}{b_n}\geq\frac{(a_1+a_2+\ldots+a_n)^p}{n^{p-2}(b_1+b_2+\ldots+b_n)}\geq\frac{(n\sqrt[n]{a_1a_1\ldots a_1})^p}{n^{p-2}}=n^2.$$

A18) Fie $n,p\geq 2$, $n,p\in\mathbb{N}$, $a_1,a_2,\ldots,a_n>0$, $a_1+a_2+\ldots+a_n=1$, $0<\alpha<\beta$, $\beta a_k-\alpha a_{k+1}>0,\forall k=1,2,\ldots,n$ (unde $a_{n+1}=a_1$). Atunci

$$\frac{a_1^p}{\beta a_1-\alpha a_2}+\frac{a_2^p}{\beta a_2-\alpha a_3}+\ldots\frac{a_n^p}{\beta a_n-\alpha a_{n+1}}\geq\frac{1}{n^{p-2}(\beta-\alpha)}.$$

Soluţie. Folosind lema avem

$$\frac{a_1^p}{\beta a_1-\alpha a_2}+\ldots+\frac{a_n^p}{\beta a_n-\alpha a_{n+1}}\geq$$

$$\geq \frac{(a_1 + \ldots + a_n)^p}{n^{p-2}[\beta(a_1 + \ldots + a_n) - \alpha(a_1 + \ldots + a_n)]} \geq \frac{1}{n^{p-2}(\beta - \alpha)}.$$

Extindere a lemei

Fie $p_2 \geq 0$, $p_2 \in \mathbb{N}$ şi $p_1 \geq p_2 + 1$, $p_1 \in \mathbb{N}$. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n \geq 0$ şi $b_1, b_2, \ldots, b_n > 0$. Are loc inegalitatea

$$\frac{a_1^{p_1}}{b_1^{p_2}} + \frac{a_2^{p_1}}{b_2^{p_2}} + \ldots + \frac{a_n^{p_1}}{b_n^{p_2}} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^{p_1}}{n^{p_1 - p_2 - 1}(b_1 + b_2 + \ldots + b_n)^{p_2}}.$$

Demonstraţie. Aplicând inegalitatea lui *Hölder* avem

$$\left(\left(\frac{a_1}{b_1^{p_2/p_1}}\right)^{p_1} + \ldots + \left(\frac{a_n}{b_n^{p_2/p_1}}\right)^{p_1}\right)^{1/p_1} ((b_1^{p_2/p_1})^{p_1/p_2} + \ldots + (b_n^{p_2/p_1})^{p_1/p_2})^{p_2/p_1}$$

$$\cdot(1 + 1 + \ldots + 1)^{1/p_1} \ldots (1 + 1 + \ldots + 1)^{1/p_1} \geq a_1 + a_2 + \ldots + a_n,$$

unde în suma $1+1+\ldots+1$ avem 1 de n ori şi numărul sumelor $1+1+\ldots+1$ este $p_1 - p_2 - 1$.

De aici rezultă imediat concluzia, prin ridicare la puterea p_1 şi împărţire cu $n^{p_1 - p_2 - 1}(b_1 + b_2 + \ldots + b_n)^{p_2}$. $\square$

Îndemnăm cititorii de a găsi şi alte exemple de aplicare a rezultatelor de mai sus.

BIBLIOGRAFIE

[1] Mihai Onucu Drîmbe, *Inegalităţi, idei şi metode*, Editura GIL, 2003.
[2] Colecţia „Gazeta Matematică“.
[3] Colecţia „Revista de Matematică din Timişoara“.