PENTRU CERCURILE DE ELEVI

UNELE PROBLEME DE GEOMETRIE ASOCIATE CONFIGURAŢIEI GEOMETRICE PAPPUS

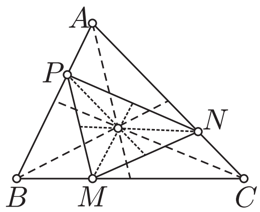
Steluţa Monea[1)] şi Mihai Monea[1)]

În literatura matematică următorul rezultat este cunoscut sub numele de teorema lui *Pappus*:

Teorema 1. *Pe laturile triunghiului ABC se consideră punctele $M \in (BC)$, $N \in (CA)$ şi $P \in (AB)$ astfel încât*

$$\frac{MB}{MC} = \frac{NC}{NA} = \frac{PA}{PB}. \tag{1}$$

Atunci triunghiurile ABC şi MNP au acelaşi centru de greutate.



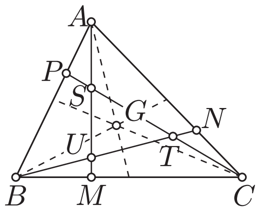
Se cunosc multe soluţii ale acestei teoreme, de la cea clasică, la cele care utilizează vectorii sau numerele complexe. De asemenea se cunosc multe generalizări, cum ar fi cea din lucrarea [1]. De-a lungul anilor, la concursurile şcolare au fost propuse diferite probleme având ca bază configuraţia de la teorema anterioară. Referinţele [2] – [5] sunt sugestive.

În cele ce urmează dorim să prezentăm patru probleme care au la bază aceeaşi configuraţie. Pentru a evita repetiţiile, menţionăm că vom utiliza ipotezele din Teorema 1. De asemenea, notăm cu k valoarea comună a rapoartelor din relaţia (1). Pentru început vom vedea că în această configuraţie se mai formează şi alte triunghiuri care păstrează centrul de greutate al triunghiului ABC.

Problema 1. *Fie $AM \cap BN = \{S\}$, $AM \cap CP = \{U\}$ şi $BN \cap CP = \{T\}$. Triunghiurile STU şi ABC au acelaşi centru de greutate.*

Demonstraţie. Vom folosi vectorii de poziţie pentru demonstraţie. Aplicând teorema lui *Menelaos* pentru triunghiul BCN şi punctele $M - S - A$, obţinem $\dfrac{MB}{MC} \cdot \dfrac{AC}{AN} \cdot \dfrac{SN}{SB} = 1$.

[1)]Profesor, Colegiul Naţional „Decebal“, Deva
[1)]Profesor, Colegiul Naţional „Decebal“, Deva



Din $\dfrac{NC}{NA} = k$, obţinem $\dfrac{AC}{AN} = k+1$ şi $\dfrac{SB}{SN} = k(k+1)$. Atunci $\overrightarrow{r_S} = \dfrac{\overrightarrow{r_B} + k(k+1)\overrightarrow{r_N}}{k^2+k+1}$. Cum $\overrightarrow{r_N} = \dfrac{\overrightarrow{r_C} + k\overrightarrow{r_A}}{k+1}$, avem $\overrightarrow{r_S} = \dfrac{k^2\overrightarrow{r_A} + \overrightarrow{r_B} + k\overrightarrow{r_C}}{k^2+k+1}$. Notăm G, respectiv G_1, centrele de greutate ale triunghiurilor ABC, respectiv STU. Atunci

$$\begin{aligned}\overrightarrow{r_{G_1}} &= \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{r_S} + \overrightarrow{r_T} + \overrightarrow{r_U}\right) = \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{k^2\overrightarrow{r_A} + \overrightarrow{r_B} + k\overrightarrow{r_C}}{k^2+k+1} + \frac{k^2\overrightarrow{r_B} + \overrightarrow{r_C} + k\overrightarrow{r_A}}{k^2+k+1} + \frac{k^2\overrightarrow{r_C} + \overrightarrow{r_A} + k\overrightarrow{r_B}}{k^2+k+1}\right) = \\ &= \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{r_A} + \overrightarrow{r_B} + \overrightarrow{r_C}\right) = \overrightarrow{r_G},\end{aligned}$$

ceea ce conduce la concluzie. □

Se ştie că dacă triunghiul MNP este echilateral, atunci şi triunghiul ABC este tot echilateral (vezi [6]). Problema următoare prezintă o situaţie mai generală.

Problema 2. *Dacă* $\triangle MNP \sim \triangle ABC$ *atunci* $k = 1$ *sau triunghiul* ABC *este echilateral.*

Demonstraţie. Folosind notaţiile uzuale, avem $AN = \dfrac{b}{k+1}$ şi $AP = \dfrac{kc}{k+1}$. Atunci $\dfrac{\mathcal{A}_{ANP}}{\mathcal{A}_{ABC}} = \dfrac{AP \cdot AN}{AB \cdot AC} = \dfrac{k}{(k+1)^2}$. În aceste condiţii,

$$\mathcal{A}_{MNP} = \mathcal{A}_{ABC} - \mathcal{A}_{ANP} - \mathcal{A}_{BMP} - \mathcal{A}_{CMN} = \mathcal{A}_{ABC}\left(1 - \frac{3k}{(k+1)^2}\right),$$

deci $\dfrac{\mathcal{A}_{MNP}}{\mathcal{A}_{ABC}} = \dfrac{k^2-k+1}{(k+1)^2}$. Din $\triangle MNP \sim \triangle ABC$, obţinem

$$\frac{k^2-k+1}{(k+1)^2} = \left(\frac{NP}{a}\right)^2 = \left(\frac{PM}{b}\right)^2 = \left(\frac{MN}{c}\right)^2.$$

Teorema cosinusului ne conduce la

$$\begin{aligned} NP^2 &= AP^2 + AN^2 - 2AP \cdot AN \cos A = \\ &= \frac{c^2k^2}{(k+1)^2} + \frac{b^2}{(k+1)^2} - \frac{2kbc}{(k+1)^2} \cdot \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \\ &= \frac{ka^2 + (1-k)\,b^2 + \left(k^2-k\right)c^2}{(k+1)^2}. \end{aligned}$$

Din egalitatea $\dfrac{k^2-k+1}{(k+1)^2} = \left(\dfrac{NP}{a}\right)^2$ obţinem

$$\left(k^2-k+1\right)a^2 = ka^2 + (1-k)\,b^2 + \left(k^2-k\right)c^2,$$

adică $(k-1)^2\,a^2 + (k-1)\,b - k\,(k-1)\,c^2 = 0$. Atunci

$$(k-1)\left((k-1)\,a^2 + b^2 - kc^2\right) = 0,$$

deci $k = 1$ sau $k\left(a^2-c^2\right) = a^2 - b^2$.

În continuare putem presupune $k \neq 1$. Un calcul similar ne conduce de la $\dfrac{k^2-k+1}{(k+1)^2} = \left(\dfrac{PM}{b}\right)^2$ la egalitatea $k\left(b^2-a^2\right) = b^2-c^2$. Eliminind pe k din cele două egalităţi obţinem

$$\left(a^2-b^2\right)\left(b^2-a^2\right) = \left(a^2-c^2\right)\left(b^2-c^2\right) \Leftrightarrow a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2 = a^4 + b^4 + c^4.$$

Ultima egalitate este adevărată doar pentru $a^2 = b^2 = c^2$, deci când triunghiul ABC este echilateral. □

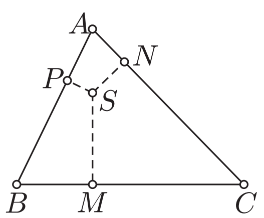
Celelalte două probleme din această lecţie analizează unele concurenţe.

Problema 3. *Dreptele AM, BN şi CP sunt concurente dacă şi numai dacă $k = 1$.*

Demonstraţie. Dreptele AM, BN şi CP sunt concurente dacă şi numai dacă $\dfrac{MB}{MC} \cdot \dfrac{NC}{NA} \cdot \dfrac{PA}{PB} = 1$. Obţinem $k^3 = 1$, deci $k = 1$. □

Problema 4. *Fie a perpendiculara în M pe BC. Definim analog dreptele b şi c. Atunci a, b, c sunt concurente dacă şi numai dacă $k = 1$.*

Demonstraţie. Evident, pentru $k = 1$, dreptele a, b, c sunt mediatoare deci sunt concurente. Acum, reciproc, fie $a \cap b \cap c = \{S\}$.



Atunci $\overrightarrow{MS} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$, adică $(\overrightarrow{r_S} - \overrightarrow{r_M}) \cdot (\overrightarrow{r_C} - \overrightarrow{r_B}) = 0$. De aici

$$\overrightarrow{r_S} \cdot (\overrightarrow{r_C} - \overrightarrow{r_B}) = \frac{\overrightarrow{r_B} + k\overrightarrow{r_C}}{1+k} (\overrightarrow{r_C} - \overrightarrow{r_B}).$$

Scriem relaţiile analoage şi le adunăm. Suntem conduşi la

$$\sum (\overrightarrow{r_B} + k\overrightarrow{r_C})(\overrightarrow{r_C} - \overrightarrow{r_B}) = 0. \qquad (2)$$

Putem considera un sistem de axe având originea în centrul cercului circumscris triunghiului ABC. De asemenea putem presupune că acest cerc are raza egală cu 1. Atunci $\overrightarrow{r_B} \cdot \overrightarrow{r_B} = 1$. Mai departe egalitatea (2) devine

$$\sum (\overrightarrow{r_B} \cdot \overrightarrow{r_C} + k - 1 - k\overrightarrow{r_B} \cdot \overrightarrow{r_C}) = 0,$$

adică

$$(k-1)(3 - \overrightarrow{r_A} \cdot \overrightarrow{r_B} - \overrightarrow{r_B} \cdot \overrightarrow{r_C} - \overrightarrow{r_C} \cdot \overrightarrow{r_A}) = 0.$$

Dar $|\overrightarrow{r_A} \cdot \overrightarrow{r_B} + \overrightarrow{r_B} \cdot \overrightarrow{r_C} + \overrightarrow{r_C} \cdot \overrightarrow{r_A}| < |\overrightarrow{r_A}|\,|\overrightarrow{r_B}| + |\overrightarrow{r_B}|\,|\overrightarrow{r_C}| + |\overrightarrow{r_C}|\,|\overrightarrow{r_A}| = 3$, deci $k = 1$, ceea ce încheie demonstraţia.

BIBLIOGRAFIE

[1] C. Cocea, *O generalizare a unei teoreme a lui Pappus*, Recreaţii Matematice, Nr. 1, 1999.
[2] D. Heuberger, *Problema 1(X)*, Olimpiada Naţională de Matematică, faza finală, 2008.
[3] D. Ş. Marinescu, *Problema 3 (IX)*, Olimpiada Naţională de Matematică, faza judeţeană, 2002.
[4] M. Monea, *Problema 4 (X)*, Olimpiada Naţională de Matematică, faza zonală, 2003.
[5] M. Teler, *Problema 3 (IX)*, Olimpiada Naţională de Matematică, faza judeţeană, 2007.
[6] ***, *Problema 2(X)*, Olimpiada Naţională de Matematică, faza judeţeană, 2006.