O INEGALITATE DE TIP CAUCHY-SCHWARZ INSPIRATĂ DE STATISTICĂ

George Stoica[1)]

Abstract. We state and prove a result equivalent to the celebrated *Cauchy-Schwarz* inequality, in both continuous and discrete versions.

Keywords: Cauchy-Schwarz inequality, mean, standard deviation.
MSC: 97I40, 97I50.

Să considerăm două funcţii continue $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$. Varianta integrală a inegalităţii *Cauchy-Schwarz* spune că

$$E^2(fg) \leq E(f^2) \cdot E(g^2), \tag{1}$$

unde $E(\cdot)$ este valoarea integralei (sau media) pe intervalul $[0,1]$ a funcţiei din paranteze:

$$E(u) = \int_0^1 u(x)dx.$$

Egalitatea în (1) are loc dacă şi numai dacă f şi g sunt proporţionale, adică există o constantă c astfel ca $f(x) = cg(x)$ pentru orice $x \in [0,1]$.

O demonstraţie elegantă poate fi găsită în [1].

În această notă vom prezenta o inegalitate de tip *Cauchy-Schwarz*, care este de fapt echivalentă cu (1), în sensul că, cele două rezultate se implică unul pe celălalt. Vom folosi notaţia de mai jos, familiară in teoria probabilităţilor şi statistică:

$$DS(u) = \sqrt{E(u^2) - E^2(u)}$$

(DS înseamnă deviaţia standard). Atunci avem următoarea inegalitate:

$$E^2(fg) \leq E(f^2) \cdot E(g^2) - \Big[|E(f)| \cdot DS(g) - |E(g)| \cdot DS(f)\Big]^2. \tag{2}$$

Este clar că (2) implică (1). Reciproc, vom folosi (1) în demonstraţia lui (2) în felul următor. Fie a şi b numere reale arbitrare; conform cu (1), avem că

$$E^2\Big((f-a)(g-b)\Big) \leq E\Big((f-a)^2\Big) \cdot E\Big((g-b)^2\Big),$$

sau

$$E^2(fg) - E(f^2) \cdot E\left(g^2\right) \leq a^2 DS^2(g) + b^2 DS^2(f) - 2aE(f)E(g^2) -$$

$$-2bE(g)E(f^2) + 2abE(f)E(g) + 2\Big[bE(f) + aE(g) - ab\Big]E(fg).$$

Fixăm t real pozitiv şi alegem

$$a = E(f) + \sqrt{t}, b = E(g) + E(f)E(g)/\sqrt{t}.$$

[1)]Saint John, New Brunswick, Canada

Obţinem $bE(f)+aE(g)=ab$ şi deci

$$E^2(fg)-E(f^2)\cdot E(g^2)\le -aDS^2(g)\Big[2E(f)-a\Big]-bDS^2(f)\Big[2E(g)-b\Big]. \quad (3)$$

Pe de altă parte,

$$\begin{aligned} & aDS^2(g)\Big[2E(f)-a\Big]+bDS^2(f)\Big[2E(g)-b\Big] \\ = \ & \Big[E^2(f)-t\Big]\left[DS^2(g)-\frac{DS^2(f)E^2(g)}{t}\right]=:f(t). \end{aligned} \quad (4)$$

Limitele lui f la $+\infty$ şi 0^+ sunt ambele egale cu $-\infty$. Totodată, funcţia f îşi atinge valoarea maximă

$$\Big[|E(f)|\,DS(g)-|E(g)|\,DS(f)\Big]^2 \text{ pentru } t=\frac{|E(f)E(g)|}{DS(f)/DS(g)}. \quad (5)$$

Ţinând cont de (3), (4) şi (5), rezultă formula (2).

Egalitatea are loc în (2) când $f(x)=1$ pentru orice $x\in[0,1]$ sau, din simetrie, când $g(x)=1$ pentru orice $x\in[0,1]$.

Invităm cititorii să găsească toate cazurile de egalitate in (2).

Este interesant de observat varianta discretă a inegalităţii (2). Să considerăm $x=(x_1,\ldots,x_n), y=(y_1,\ldots,y_n)$; atunci avem

$$\left(\sum_{i=1}^n x_iy_i\right)^2\le\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right)-n^2\Big[|E(x)|\,DS(y)-|E(y)|\,DS(x)\Big]^2, \quad (6)$$

unde

$$E(x)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i \text{ şi } DS(x)=\sqrt{\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)-E^2(x)}$$

sunt media, respectiv deviaţia standard, a lui x (similar definim $E(y)$ şi $DS(y)$). Este clar că inegalitatea (6) implică celebra inegalitate *Cauchy-Schwarz* în cazul discret. În continuare vom schiţa reciproca ultimei afirmaţii, folosind metoda de la inegalitatea integrală (2). Din

$$\left[\sum_{i=1}^n (x_i-a)(y_i-b)\right]^2\le\left[\sum_{i=1}^n (x_i-a)^2\right]\left[\sum_{i=1}^n (y_i-b)^2\right]$$

obţinem echivalentul formulei (3):

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{i=1}^n x_iy_i\right)^2-\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right)\le \\ \le \ & -n^2\Big\{aDS^2(y)\Big[2E(x)-a\Big]+bDS^2(x)\Big[2E(y)-b\Big]\Big\}. \end{aligned}$$

Apoi demonstraţia decurge identic cu cea din cazul integral.

Egalitatea are loc în inegalitatea *Cauchy-Schwarz* discretă dacă şi numai dacă x şi y sunt proporţionale, adică există o constantă c astfel ca $x_i = cy_i$ pentru orice $i = 1, \ldots, n$. Observăm că egalitatea are loc în inegalitatea (5) când $x_i = 1$ pentru orice $i = 1, \ldots, n$ sau, din simetrie, când $y_i = 1$ pentru orice $i = 1, \ldots, n$.

Invităm cititorii să găsească toate cazurile de egalitate în (5).

Bibliografie

[1] J.M. Steele, *The Cauchy-Schwarz Master Class: An Introduction to the Art of Mathematical* Inequalities, Cambridge University Press, 2004. În format electronic: `http://www-stat.wharton.upenn.edu/ steele/Publi cations/Books/CSMC/CSMC.`

PENTRU CERCURILE DE ELEVI

ASUPRA UNOR RELAŢII DE CONGRUENŢĂ

FELICIAN PREDA[1)] şi BOGDAN IORDACHE[2)]

Prezentăm mai întâi un rezultat care îi aparţine lui *Lucas* (*François Edouard Anatole Lucas*, matematician francez, 1842-1891).

Lema lui Lucas (1878). *Fie a, b, c, d şi p numere naturale, p prim, $a \neq 0$, $b < p$, $d < p$. Atunci avem*

$$C_{ap+b}^{cp+d} \equiv C_a^c \cdot C_b^d (\operatorname{mod} p).$$

Demonstraţia 1. Vom demonstra mai întâi prin numărare. Considerăm un caroiaj de $p \times a$ pătrate dispuse pe p linii şi a coloane şi, în plus, o coloană cu $b < p$ pătrate. Putem alege $cp + d$ pătrate în C_{ap+b}^{cp+d} moduri. O alegere a celor $cp + d$ pătrate arată astfel: x_1 pătrate de pe coloana 1, x_2 pătrate de pe coloana 2, până la x_a pătrate de pe coloana a şi, în plus, x_0 pătrate de pe coloana cu b pătrate.

Cazul 1: Există $i \in \overline{1, a}$ astfel încât $x_i \neq 0$ şi $x_i \neq p$. Numărul de alegeri posibile, într-un astfel de caz, este:

$$C_p^{x_1} \cdot C_p^{x_2} \cdot \ldots \cdot C_p^{x_a} \cdot C_b^{x_0}$$

Fiecare dintre aceste produse este divizibil cu p deoarece conţine cel puţin un termen divizibil cu p.

Cazul 2: Oricare ar fi $i \in \overline{1, a}$ avem $x_i = 0$ sau $x_i = p$. Vom avea în total $C_a^c \cdot C_b^d$ posibilităţi.

Deci, în total, numărul de posibilităţi este $M_p + C_a^c \cdot C_b^d = C_{ap+b}^{cp+d}$, de aici concluzia. Dacă $d > b$, alegerea de la cazul 2 nu este posibilă; prin urmare,

[1)]Profesor, Şc. Gim. „Gh. Ţiţeica", Craiova.

[2)]Elev, C.N. „Fraţii Buzeşti“, Craiova.