O CONFIGURAŢIE INTERESANTĂ

STAN FULGER[1)]

Abstract. Starting from a geometry problem about a triangle with particular angles, some other properties of the related configuration are investigated

Keywords: triangle, 30°, 24°, 18°, 12°, 6°

MSC: 51M04

Articolul de mai jos propune o soluţie a următoarei probleme apărute în *Geometri Günlüğü (Jurnal de Geometrie)*:

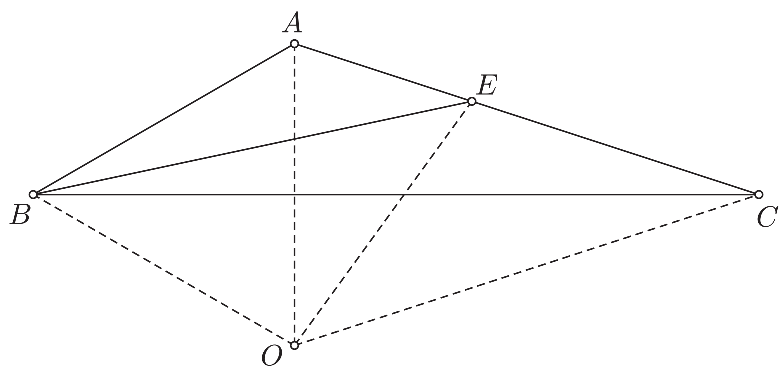
În interiorul triunghiului ABC există punctul D având proprietăţile: $\mathrm{m}(\sphericalangle ABD) = 6^\circ, \mathrm{m}(\sphericalangle CBD) = 24^\circ, \mathrm{m}(\sphericalangle BCD) = 6^\circ, \mathrm{m}(\sphericalangle ACD) = 12^\circ$.

Determinaţi măsura unghiului BAD.

Abdilkadir Altintaş

Pentru a determina măsura acestui unghi, vom stabili, mai întâi, unele proprietăţi ale acestei configuraţii.

Lema 1. *Pe latura AC a triunghiului ABC cu* $\mathrm{m}(\sphericalangle B) = 30^\circ, \mathrm{m}(\sphericalangle C) = 18^\circ$ *se ia punctul E astfel ca* $\mathrm{m}(\sphericalangle ABE) = 18^\circ$. *Atunci $CE = AB$.*



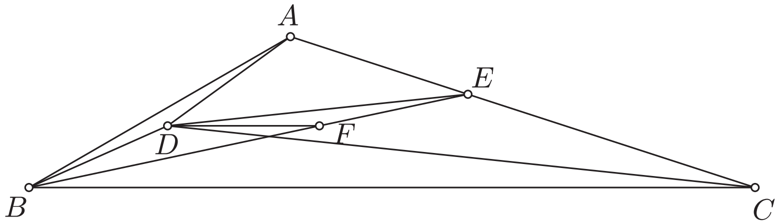
Demonstraţie. Fie O centrul cercului circumscris $\triangle ABE$. Observăm că $\triangle ABO$ este echilateral, deoarece $OA = OB$ şi $\mathrm{m}(\sphericalangle AOB) = 2\mathrm{m}(\sphericalangle AEB) = 2(\mathrm{m}(\sphericalangle ECB) + \mathrm{m}(\sphericalangle EBC)) = 2(18^\circ + 12^\circ) = 60^\circ$. De asemenea, $\triangle AOE$ isoscel cu $\mathrm{m}(\sphericalangle AEO) = 72^\circ$ şi O este simetricul lui A faţă de BC, deci $\triangle ACO$ este isoscel cu $\mathrm{m}(\sphericalangle ACO) = 36^\circ$, aşadar $\triangle CEO$ este isoscel, deci în final $CE = OE = AB$. $\square$

Trecem acum la rezolvarea problemei iniţiale.

Construim E ca în Lema 1. Deoarece $\mathrm{m}(\sphericalangle DBE) = \mathrm{m}(\sphericalangle DCE) = 12^\circ$, $BCED$ este inscriptibil. În consecinţă $\mathrm{m}(\sphericalangle BED) = \mathrm{m}(\sphericalangle BCD) = 6^\circ$ şi $DE = CE$. Fie $F \in BE$ astfel încât $DF = EF$; cum $\mathrm{m}(\sphericalangle DBE) = 2\mathrm{m}(\sphericalangle BED) = \mathrm{m}(\sphericalangle BFD)$, obţinem $DF = BD$. Din $EF = DB$, $DE =$

[1)]Constanţa

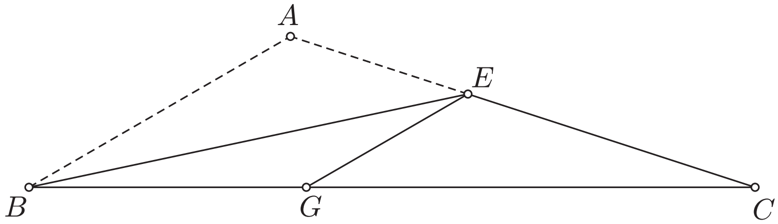
$= AB$ şi m($\sphericalangle ABD$) = m($\sphericalangle DEF$) $= 6°$ avem că $\triangle DEF \equiv \triangle ABD$ (L.U.L.), deci m($\sphericalangle BAD$) $= 6°$ şi problema este rezolvată.



Observaţie. Pentru $DE = AB$ găsim o nouă proprietate: în interiorul triunghiul $\triangle ABE$ cu m($\sphericalangle ABE$) $= 18°$ şi m($\sphericalangle AEB$) $= 30°$ punctul D cu $AD = BD$ şi m($\sphericalangle ABD$)$=6°$, are proprietăţile $DE = AB$ şi m($\sphericalangle BED$)$=6°$.

Lema 2. *În triunghiul BEC cu* m($\sphericalangle CBE$) $= 12°$, m($\sphericalangle BCE$) $= 18°$ *se ia un punct G pe $[BC]$ cu proprietatea* m($\sphericalangle BEG$) $= 18°$. *Atunci $CG = BE$.*

Demonstraţie. Considerăm $A \in (CE$ astfel încât $AB \parallel GE$. Conform Lemei 1, $CE = AB$ şi $\triangle BAE \equiv GEC$ (L.U.L.), q.e.d.



Să observăm că, în plus, $GE = AE$. □

Propunem spre rezolvare următoarea problemă, aflată la adresa `http://www.artofproblemsolving.com/community/c4t48f4h1331675_find_the_angle_bcd_`

Triunghiul ABC are m($\sphericalangle A$) $= 6°$ *şi* m($\sphericalangle B$) $= 12°$. *Latura BC se prelungeşte cu segmentul DC astfel încât $DC = AB$ şi $C \in (BD$. Determinaţi măsura unghiului $\sphericalangle ADB$.*

Indicaţie. Se iau punctele M, N pe BC astfel încât $AM = AD$, $M \neq D$, $AN = AC$, $N \neq C$ şi se aplică Lema 2.

Bibliografie

[1] Abdilkadir Altintaş, *Geometri Günlüğü.*
[2] `http://www.artofproblemsolving.com`