PENTRU CERCURILE DE ELEVI

FORMA CANONICĂ JORDAN PENTRU MATRICE PĂTRATICE DE ORDINUL DOI

Alexandru Băltărigă[1)] şi Anca Băltărigă[2)]

În cele ce urmează prezentăm o scurtă introducere în teoria formei canonice *Jordan*. Ne rezumăm la cazul matricelor pătratice de ordinul doi cu elemente numere complexe.

Fie $A = (a_{ij})_{i,j\in\{1,2\}} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Notăm cu $Spec(A)$ mulţimea valorilor proprii ale lui A, adică rădăcinile ecuaţiei

$$\begin{vmatrix} a_{11}-x & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-x \end{vmatrix} = 0.$$

Valorile proprii ale matricei sunt numerele complexe c pentru care sistemul

$$\begin{cases} (a_{11}-c)x + a_{12}y = 0 \\ a_{21}x + (a_{22}-c)y = 0 \end{cases}$$

are soluţii nenule, adică numerele complexe c pentru care există un vector nenul $v \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{C})$ astfel încât $Av = cv$.

Propoziţia 1. *Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, $A \neq \mathcal{O}_2$ o matrice nilpotentă. Atunci există $S \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ inversabilă astfel încât*

$$A = S^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} S.$$

Demonstraţie. Deoarece A este matrice nilpotentă deducem că $\det(A) = Tr(A) = 0$. Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ cu $a + d = 0$ şi $ad - bc = 0$.

Dacă $c = 0$ rezultă că $a = d = 0$ şi $b \neq 0$. Considerăm $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{b} & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{GL}_2(\mathbb{C})$. În acest caz se verifică uşor că

$$SAS^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dacă $c \neq 0$ considerăm $S = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-a}{c} \\ 0 & \frac{1}{c} \end{pmatrix} \in \mathcal{GL}_2(\mathbb{C})$. Se verifică din nou că

$$SAS^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

[1)] Student, Facultatea de Matematică şi Informatică, Universitatea din Bucureşti
[2)] Studentă, Facultatea de Matematică şi Informatică, Universitatea din Bucureşti

Propoziţia 2. *Fie* $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ *cu* $Spec(A) = \{\lambda\}$, $A \neq \lambda\mathcal{I}_2$, *unde* $\lambda \in \mathbb{C}$. *Atunci există* $S \in \mathcal{GL}_2(\mathbb{C})$ *astfel încât*

$$A = S^{-1}\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} S.$$

Demonstraţie. Evident, $A - \lambda\mathcal{I}_2 \neq \mathcal{O}_2$.

Mai întâi arătăm că $A - \lambda\mathcal{I}_2$ este matrice nilpotentă. Fie α o valoare proprie a lui $A - \lambda\mathcal{I}_2$. Rezultă că există $v \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{C})$, $v \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ astfel încât $(A - \lambda\mathcal{I}_2)v = \alpha v$. Atunci $Av = (\lambda + \alpha)v$. De aici rezultă că $\lambda + \alpha \in Spec(A)$, prin urmare $\alpha = 0$. Cum valorile proprii ale lui $A - \lambda\mathcal{I}_2$ sunt egale cu 0 rezultă că $A - \lambda\mathcal{I}_2$ este matrice nilpotentă.

Folosind Propoziţia 1 obţinem că există $S \in \mathcal{GL}_2(\mathbb{C})$ astfel încât $A - \lambda\mathcal{I}_2 = S^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} S$, de unde rezultă că $A = S^{-1}\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} S$.

Definiţie. *În ipotezele propoziţiei 2, matricea* $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$ *reprezintă forma canonică Jordan a lui A.*

Propoziţia 3. *Fie* $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ *cu* $Spec(A) = \{\lambda_1, \lambda_2\}$ *unde* $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ *distincte. Atunci există* $S \in \mathcal{GL}_2(\mathbb{C})$ astfel încât

$$A = S^{-1}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} S.$$

Demonstraţie. Deoarece λ_i este valoare proprie a lui A, oricare ar fi $i \in \{1, 2\}$ rezultă că există $v_i \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{C})$, $v_i \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ astfel încât $Av_i = \lambda_i v_i$, oricare ar fi $i \in \{1, 2\}$, $(*)$.

Fie $v_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ şi $v_2 = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$. Considerăm $T = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$. Arătăm că T este matrice inversabilă.

Presupunem prin reducere la absurd că $\det(T) = 0$. Atunci coloanele lui T sunt proporţionale, deci există $c \in \mathbb{C}$ astfel încât $v_2 = cv_1$. Prin urmare $Av_2 = cAv_1$. De aici rezultă că $\lambda_2 v_2 = c\lambda_1 v_1$, deci $\lambda_2 cv_1 = c\lambda_1 v_1$.

Astfel obţinem că

$$(\lambda_1 - \lambda_2)cv_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dar $\lambda_1 \neq \lambda_2$ şi $v_1 \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Rezultă că $c = 0$, deci $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ – contradicţie.

Fie $S = T^{-1}$. Verificăm că $AT = T\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$. Considerăm $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Avem

$$AT = \begin{pmatrix} ax_1 + bx_2 & ay_1 + by_2 \\ cx_1 + dx_2 & cy_1 + dy_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 x_1 & \lambda_2 y_1 \\ \lambda_1 x_2 & \lambda_2 y_2 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

(penultima egalitate se deduce din ($*$)). Aşadar,

$$A = S^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} S.$$

Definiţie. *În ipotezele propoziţiei* 3, *matricea* $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ *reprezintă forma canonică Jordan a lui* A.

Aplicaţii

Problema 1. (Olimpiada Naţională de Matematică, Etapa Naţională 2016) Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ o matrice care satisface condiţiile

$\det(A^{2014} - \mathcal{I}_2) = \det(A^{2014} + \mathcal{I}_2)$ şi $\det(A^{2016} - \mathcal{I}_2) = \det(A^{2016} + \mathcal{I}_2)$.

Demonstraţi că

$$\det(A^n - \mathcal{I}_2) = \det(A^n + \mathcal{I}_2)$$

pentru orice număr natural nenul n.

Soluţie. Dacă A este de forma $\alpha\mathcal{I}_2$ rezultă imediat că $\alpha = 0$, deci $A = \mathcal{O}_2$. În acest caz se verifică imediat că $\det(A^n - \mathcal{I}_2) = \det(A^n + \mathcal{I}_2)$ pentru orice număr natural nenul n.

Dacă A are o singură valoare proprie λ şi $A \neq \lambda\mathcal{I}_2$ atunci există S astfel încât

$$A = S^{-1} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} S.$$

Din $\det(A^{2014} - \mathcal{I}_2) = \det(A^{2014} + \mathcal{I}_2)$ rezultă că

$$\det(S^{-1} \begin{pmatrix} \lambda^{2014} - 1 & 0 \\ 2014\lambda^{2013} & \lambda^{2014} - 1 \end{pmatrix} S) = \det(S^{-1} \begin{pmatrix} \lambda^{2014} + 1 & 0 \\ 2014\lambda^{2013} & \lambda^{2014} + 1 \end{pmatrix} S),$$

de unde rezultă că $(\lambda^{2014} - 1)^2 = (\lambda^{2014} + 1)^2$. Astfel deducem că $\lambda = 0$. Atunci $(\lambda^n - 1)^2 = (\lambda^n + 1)^2$ pentru orice n număr natural nenul. Deci, $\det(A^n - \mathcal{I}_2) = \det(A^n + \mathcal{I}_2)$ pentru orice număr natural nenul n.

Dacă A are două valori proprii distincte λ_1, λ_2 atunci există $S \in \mathcal{GL}_2(\mathbb{C})$ astfel încât

$$A = S^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} S.$$

Din $\det(A^{2014} - \mathcal{I}_2) = \det(A^{2014} + \mathcal{I}_2)$ rezultă că

$$\det(S^{-1} \begin{pmatrix} {\lambda_1}^{2014} - 1 & 0 \\ 0 & \lambda_2^{2014} - 1 \end{pmatrix} S) = \det(S^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1^{2014} + 1 & 0 \\ 0 & \lambda_2^{2014} + 1 \end{pmatrix} S),$$

de unde rezultă că

$$({\lambda_1}^{2014} - 1)({\lambda_2}^{2014} - 1) = ({\lambda_1}^{2014} + 1)({\lambda_2}^{2014} + 1).$$

Deducem că ${\lambda_1}^{2014} + {\lambda_2}^{2014} = 0$.

Analog obţinem că ${\lambda_1}^{2016}+{\lambda_2}^{2016}=0$. Dacă λ_1 şi λ_2 sunt nenule atunci ${\lambda_1}^2={\lambda_2}^2$ de unde rezultă că $\lambda_1=\lambda_2=0$, ceea ce reprezintă o contradicţie. Prin urmare $\lambda_1=\lambda_2=0$ – contradicţie cu $\lambda_1\neq\lambda_2$.

Problema 2. (Olimpiada Naţională de Matematică, Faza Judeţeană 2016) Fie $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, astfel încât

$$\det(A^2+A+\mathcal{I}_2)=\det(A^2-A+\mathcal{I}_2)=3.$$

Demonstraţi că

$$A^2(A^2+\mathcal{I}_2)=2\mathcal{I}_2.$$

Soluţie. Dacă A este de forma $\alpha\mathcal{I}_2$ obţinem

$$(\alpha^2+\alpha+1)^2=(\alpha^2-\alpha+1)^2=3.$$

Cum $(\alpha^2+\alpha+1)^2-(\alpha^2-\alpha+1)^2=0$ rezultă că $\alpha(\alpha^2+1)=0$, deci $\alpha\in\{0,i,-i\}$. Niciuna dintre aceste valori nu verifică egalităţile.

Dacă A are o singură valoare proprie λ şi $A\neq\lambda\mathcal{I}_2$ atunci există S astfel încât

$$A=S^{-1}\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 1 & \lambda\end{pmatrix}S.$$

Din $\det(A^2+A+\mathcal{I}_2)=\det(A^2-A+\mathcal{I}_2)=3$ rezultă că

$$\det(S^{-1}\begin{pmatrix}\lambda^2+\lambda+1 & 0\\ 2\lambda+1 & \lambda^2+\lambda+1\end{pmatrix}S)=$$
$$=\det(S^{-1}\begin{pmatrix}\lambda^2-\lambda+1 & 0\\ 2\lambda-1 & \lambda^2-\lambda+1\end{pmatrix}S)=3,$$

de unde rezultă că

$$(\lambda^2+\lambda+1)^2=(\lambda^2-\lambda+1)^2=3.$$

Am arătat mai sus că nu avem soluţii.

Dacă A are două valori proprii distincte λ_1,λ_2 atunci există $S\in\mathcal{GL}_2(\mathbb{C})$ astfel încât

$$A=S^{-1}\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}S.$$

Din $\det(A^2+A+\mathcal{I}_2)=\det(A^2-A+\mathcal{I}_2)=3$ rezultă că

$$\det(S^{-1}\begin{pmatrix}{\lambda_1}^2+\lambda_1+1 & 0\\ 0 & {\lambda_2}^2+\lambda_2+1\end{pmatrix}S)=$$
$$=\det(S^{-1}\begin{pmatrix}\lambda_1^2-\lambda_1+1 & 0\\ 0 & \lambda^2-\lambda_2+1\end{pmatrix}S)=3,$$

de unde rezultă că

$$(\lambda_1^2+\lambda_1+1)(\lambda_2^2+\lambda_2+1)=(\lambda_1^2-\lambda_1+1)(\lambda_2^2-\lambda_2+1)=3. \qquad (**)$$

Efectuând înmulţirile şi reducând termenii asemenea obţinem că

$$(\lambda_1+\lambda_2)(\lambda_1\lambda_2+1)=0.$$

De aici rezultă că $\lambda_2 = -\lambda_1$ sau $\lambda_1\lambda_2 = -1$.

Dacă $\lambda_2 = -\lambda_1$ atunci $(**)$ devine ${\lambda_1}^4 + {\lambda_1}^2 = {\lambda_2}^4 + {\lambda_2}^2 = 2$.

Dacă $\lambda_1\lambda_2 = -1$ rezultă că $\lambda_2 = \frac{-1}{\lambda_1}$. Înlocuind în $(**)$ obţinem ${\lambda_1}^2 + \frac{1}{{\lambda_1}^2} = 2$. Deci $(\lambda_1 - \frac{1}{\lambda_1})^2 = 0$. Prin urmare ${\lambda_1}^2 = 1$. De aici rezultă că ${\lambda_1}^4 + {\lambda_1}^2 = {\lambda_2}^4 + {\lambda_2}^2 = 2$.

Aşadar, ${\lambda_1}^4 + {\lambda_1}^2 = {\lambda_2}^4 + {\lambda_2}^2 = 2$, $(* * *)$.

Atunci

$$A^2(A^2 + \mathcal{I}_2) = S^{-1}\begin{pmatrix} {\lambda_1}^2 & 0 \\ 0 & {\lambda_2}^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} {\lambda_1}^2 + 1 & 0 \\ 0 & {\lambda_2}^2 + 1 \end{pmatrix} S = 2\mathcal{I}_2,$$

ţinând cont de relaţia $(* * *)$.

Problema 3. (Olimpiada Naţională de Matematică, Etapa Naţională 2011) Fie $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ cu proprietatea $A^2 + B^2 = 2AB$.

a) Arătaţi că $AB = BA$.

b) Arătaţi că $Tr(A) = Tr(B)$.

Soluţie. a) Din $A^2 + B^2 = 2AB$ deducem că $(A - B)^2 = AB - BA$.

Dacă $A - B$ este de forma $\alpha\mathcal{I}_2$ atunci $(A - B)^2 = \alpha^2\mathcal{I}_2$. Cum $Tr(AB - BA) = 0$ rezultă că $\alpha = 0$ deci $AB = BA$.

Dacă $A - B$ are o singură valoare proprie λ şi $A - B \neq \lambda\mathcal{I}_2$ atunci există S astfel încât

$$A - B = S^{-1}\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} S.$$

Rezultă că

$$(A - B)^2 = S^{-1}\begin{pmatrix} \lambda^2 & 0 \\ 2\lambda & \lambda^2 \end{pmatrix} S.$$

Cum $Tr(AB - BA) = 0$ rezultă că $\lambda = 0$. De aici rezultă că $(A - B)^2 = \mathcal{O}_2$, deci $AB = BA$.

Dacă $A - B$ are două valori proprii distincte λ_1, λ_2 atunci există S astfel încât

$$A - B = S^{-1}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} S.$$

Rezultă că

$$SAS^{-1} - SBS^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Mai mult,

$$SA^2S^{-1} + SB^2S^{-1} = 2SAS^{-1}SBS^{-1}.$$

Notăm $C = SAS^{-1}$ şi $D = SBS^{-1}$. Avem

$$C - D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

şi

$$C^2 + D^2 = 2CD. \qquad (*)$$

Atunci $C = D + \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$. Înlocuind în $(*)$ obţinem

$$D \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} {\lambda_1}^2 & 0 \\ 0 & {\lambda_2}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} D.$$

Considerăm $D = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Rezultă că $a\lambda_1 + {\lambda_1}^2 = a\lambda_1$ şi $d\lambda_2 + {\lambda_2}^2 = d\lambda_2$.

Astfel obţinem că $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ – contradicţie cu λ_1, λ_2 distincte. Aşadar, $AB = BA$.

b) Am arătat la punctul a) că $A - B = \mathcal{O}_2$, adică există S astfel încât

$$A - B = S^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} S.$$

De aici rezultă că $Tr(A - B) = 0$, deci $Tr(A) = Tr(B)$.