

Așadar relațiile (*) și (**) sunt adevărate, fără ca ele să implice comutativitatea grupului G .

PROBLEME PROPUSE

PROBLEME PENTRU EXAMENE NAȚIONALE¹⁾

Clasa a VII-a

1. Aflați suma tuturor numerelor de forma \overline{ab} , cu cifre consecutive și care sunt divizibile cu 3.
2. Scrieți numerele naturale de cel mult trei cifre care sunt și pătrate perfecte și cuburi perfecte.
3. Dacă $\frac{a}{b} = \frac{2}{5}$, calculați $\frac{3a}{a+b}$.
4. Care este probabilitatea ca, alegând la întâmplare 10 numere naturale de două cifre, suma lor să fie 144?
5. După ce am cheltuit o parte din banii pe care îi aveam am constatat că mai am 264 de lei, ceea ce reprezintă $\frac{3}{8}$ din suma inițială. Câți lei am cheltuit?
6. Găsiți numerele de forma $\overline{3x5y}$ divizibile cu 45.

Clasa a VIII-a

7. Aflați numărul natural a știind că $\sqrt{54} + \sqrt{216} = a\sqrt{6}$.
8. Comparați numerele $a = 6,9$ și $b = 5\sqrt{2}$.
9. Aflați media aritmetică a numerelor $3\sqrt{2} - 4$ și $8 - \sqrt{18}$.
10. Ordonăți crescător numerele a, b, c, d știind că $(a, b) \subset (c, d)$.
11. Ordonăți descrescător numerele a, b, c, d știind că $(a, b) \cup (c, d) = (c, b)$.
12. Aflați diferența numerelor naturale a și b , știind că intervalul $[a, b]$ conține exact trei numere naturale.

Clasa a IX-a

13. Fie $A = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$. Arătați că $\sqrt{31 - 12\sqrt{3}} \in A$.
14. Arătați că există o infinitate de numere naturale n , cu proprietatea că $\sqrt{1 + 2 + \dots + n}$ este număr rațional.
15. Demonstrați că există o infinitate de numere iraționale α cu proprietatea că $\alpha^2 + \alpha$ este număr întreg.

¹⁾ La problemele din această rubrică nu se primesc soluții. (N.R.)

16. Arătați că numărul $\sqrt{29 + 10\sqrt{2}} + \sqrt{29 - 10\sqrt{2}}$ este număr natural.

17. Arătați că numărul $(2 - \sqrt{3}) + \sqrt{7 + 4\sqrt{3}}$ este număr natural.

18. Care este probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea

$$\{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \dots, \sqrt{2016}\},$$

el să fie irațional ?

Clasa a X-a

19. Determinați mulțimea valorilor reale ale lui x pentru care expresia

$$\sqrt[4]{x^2 - x - 2}$$

are sens.

20. Determinați $a, b \in \mathbb{Z}$ știind că $\sqrt[6]{(1 - \sqrt{2})^6} = a + b\sqrt{2}$.

21. Determinați probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea

$$\{\sqrt[3]{1}, \sqrt[3]{2}, \dots, \sqrt[3]{2016}\},$$

el să fie număr rațional.

22. Ordonăți crescător numerele 3 , $2\sqrt{2}$ și $4\sqrt[6]{4}$.

23. Arătați că numărul $\sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7 - 5\sqrt{2}}$ este număr natural.

24. Arătați că numărul $\sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}} \cdot (4 - 2\sqrt{2})$ este număr natural.

Clasa a XI-a

25. Fie matricea $A(m) = \begin{pmatrix} 1 & m & 2 \\ 0 & 1 & m \\ 0 & 1 & m+1 \end{pmatrix}$, $m \in \mathbb{R}$.

a) Calculați $\det A(m)$, $m \in \mathbb{R}$.

b) Determinați $(A(2))^{-1}$.

c) Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$. Determinați în funcție de m matricea $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

astfel încât $A(m) \cdot X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

26. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \ln(x^2 + 1)$.

a) Arătați că f este strict crescătoare.

b) Scrieți ecuația tangentei la graficul funcției în punctul $A(1, \ln 2)$.

c) Determinați punctele de inflexiune ale lui f .

Clasa a XII-a

27. Pe \mathbb{R} definim legea de compoziție „ $*$ ” prin

$$x * y = xy + 5x + ay + 20, \quad a \in \mathbb{R}.$$

a) Determinați a știind că $1 * 2 = 7$.

b) Determinați valorile lui a pentru care legea $*$ este asociativă.

c) Determinați valorile lui a pentru care legea $*$ are element neutru.

28. Fie funcția $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{x^n}{\sqrt{x^2 + 1}}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Calculați $\int_0^1 f_1(x) dx$.

b) Calculați aria suprafeței mărginite de graficul funcției f_2 , axa Ox și dreptele $x = 0$, $x = 1$.

c) Calculați volumul corpului obținut prin rotirea graficului funcției $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f_1(x)$ în jurul axei Ox .