

PROBLEME PENTRU EXAMENE NAȚIONALE¹⁾

Clasa a IX-a

13. Arătați că ecuația $x^2 + ax - b = 0$ cu $a, b \in \mathbb{R}$ și $0 < b \leq a$ nu are ambele rădăcini întregi.

14. Determinați $a \in \mathbb{R}$ știind că funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 4x + a$ are axă de simetrie dreapta $x = 2a$.

15. Determinați $m \in \mathbb{R}$ știind că graficele funcțiilor $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x^2 + x + 1$ și $g(x) = x^2 + m$ au exact un punct de intersecție.

16. Determinați $x \in [0, 2\pi]$ pentru care $\sin(2x - 1) = \sin(x + 1)$.

17. Rezolvați ecuația $3\sin x + 4\cos x = 5, x \in \mathbb{R}$.

18. Arătați că $|5\sin x + 12\cos x| \leq 13$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

Clasa a X-a

19. Rezolvați ecuația $\log_2(4 + 4^x) = x - 2 + \log_2(14 + 2^x)$.

20. Se consideră funcția inversabilă $f : [1, \infty) \rightarrow (0, 1], f(x) = \frac{2x}{1 + x^2}$.

Calculați $f^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)$.

21. Rezolvați ecuația $n^x + (n+1)^x + (n^2 + n)^x = (n^2 + n + 1)^x, x \in \mathbb{R}$, unde $n \in \mathbb{N}^*$ este un număr fixat.

22. Fie $a > b > 1, A = \log_a(a - b)$ și $B = \log_b(a - b)$. Știind că $a^2 + b^2 = 3ab$, arătați că $A + B = 2AB$.

23. Arătați că $\{a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \mid a + \frac{1}{a} \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

24. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție cu proprietatea $f(f(x)) = x^2 - x + 1$. Calculați $f(1)$.

¹⁾ La problemele din această rubrică nu se primesc soluții. (N.R.)