

## PROBLEME PENTRU EXAMENE NAȚIONALE

### Clasa a IX-a

13. Fie  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{2x+1}{x^2(x+1)^2}$ . Calculați

$$f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(2016).$$

14. Fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 + 1}$ . Arătați că  $f$  este funcție măginită.

15. Fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} (-1)^{[x]}, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \\ 0, & x \in \mathbb{Z} \end{cases}$ . Arătați că  $f$  are o infinitate de axe de simetrie.

16. Determinați  $x \in (0, \pi)$  pentru care  $\sin x \cdot \cos \frac{\pi}{7} = -\cos x \cdot \cos \frac{5\pi}{14}$ .

17. Fie  $x, y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  astfel încât  $\sin x - \sin y = \cos y - \cos x$ . Arătați că  $x = y$ .

18. Determinați valorile lui  $x \in \mathbb{R}$  pentru care  $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$ .

### Clasa a X-a

19. Fie  $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < 5\}$ . Câte funcții impare  $f : A \rightarrow A$  există?

20. Fie  $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < 6\}$ . Câte funcții pare și injective  $f : A \rightarrow A$  există?

21. Rezolvați ecuația  $\sqrt[3]{1-2x} + \log_{\frac{1}{3}} x = -1$ .

22. Calculați  $\operatorname{arctg} \frac{1}{2 \cdot 1^2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \dots + \operatorname{arctg} \frac{1}{2 \cdot 100^2}$ .

23. Rezolvați ecuația  $\arcsin(\sin x) = 1, x \in \mathbb{R}$ .

24. Determinați  $x \in [-1, 1]$  pentru care  $\arcsin x \cdot \arccos x = \frac{1}{2}$ .