

PROBLEME PROPUSE

PROBLEME PENTRU EXAMENE NAȚIONALE¹⁾

Clasa a IX-a

13. Calculați partea întreagă a numărului $\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{100}}$.
14. Arătați că $|x + y| = |x| + |y|$ dacă și numai dacă $xy \geq 0$.
15. Determinați submulțimile mulțimii $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ divide } 5\}$.
16. Arătați că $\bigcap_{n \geq 1} \left(0, \frac{1}{n}\right) = \emptyset$.
17. Determinați toate perechile $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ cu $2x + 5y = 40$.
18. Fie $n \in \mathbb{N}$ astfel ca $\sqrt{n} \in \mathbb{Q}$. Arătați că n este pătrat perfect.

Clasa a X-a

19. Precizați domeniul maxim de definiție a funcției

$$f(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{2-x}.$$

20. Arătați că nu există $a, b \in \mathbb{Q}$ cu $\sqrt[3]{2} = a + b\sqrt{2}$.

21. Arătați că $\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1} = \sqrt[3]{\frac{1}{9}} - \sqrt[3]{\frac{2}{9}} + \sqrt[3]{\frac{4}{9}}$.

22. Rezolvați ecuația $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}} = 2$.

23. Arătați că $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}} < 2$.

24. Aflați $n \in \mathbb{N}$ pentru care

$$\sqrt[n]{1 + \sqrt{5} + 38} + \sqrt[n]{1 + \sqrt{5} - 38} = \sqrt{20}.$$

Clasa a XI-a

25. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calculați $\det(A - I_3)$.

b) Calculați A^{-1} .

c) Demonstrați că $3A^n = 2^n(A + I_3) + (-1)^n(2I_3 - A)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

26. Considerăm un șir de numere reale $(x_n)_{n \geq 0}$ cu $x_0, x_1 \in (0, 1)$ și $x_{n+2} = x_n(1 - x_{n+1})$, $n \geq 0$.

a) Arătați că șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ este mărginit.

b) Arătați că subșirurile $(x_{2n})_{n \geq 0}$ și $(x_{2n+1})_{n \geq 0}$ sunt descrescătoare.

c) Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n x_{n+1}$.

¹⁾ La problemele din această rubrică nu se primesc soluții. (N.R.)

Clasa a XII-a

27. Considerăm mulțimea $G = \left\{ A(x) = \begin{pmatrix} x & -x \\ -x & x \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R}^* \right\}$.

a) Arătați că $A(x) \cdot A(y) = A(2xy)$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

b) Arătați că G este grup în raport cu operația de înmulțire a matricelor pătratice de ordinul 2.

c) Determinați inversul elementului $A(1)$ în grupul G .

28. Pentru fiecare număr natural nenul n considerăm funcția

$$f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{x^n}{x^2 + 1}.$$

a) Calculați $\int f_1(x) dx$.

b) Calculați $\int_0^1 (f_n(x) + f_{n+2}(x)) dx$, $n \in \mathbb{N}^*$.

c) Demonstrați că $\frac{1}{2(n+1)} \leq \int_0^1 f_n(x) dx \leq \frac{1}{2(n-1)}$, oricare ar fi

$n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.