PENTRU CERCURILE DE ELEVI

INVERSIUNE SIMETRICĂ

ANDREI GRAUR[1)]

1. Introducere

Vom începe prin a reaminti definiţia inversiunii. Considerăm în planul π un punct O. Fie r un număr real nenul. Numim *inversiune de pol O şi putere r* funcţia $f : \pi \setminus \{O\} \to \pi \setminus \{O\}$ ce asociază fiecărui punct P, diferit de O, punctul $f(P) = P'$ care aparţine dreptei OP şi are proprietatea $\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = r$.

Numim *inversiune simetrică de pol O, putere r şi dreaptă ℓ care conţine polul O*, o funcţie $h : \pi \setminus \{O\} \to \pi \setminus \{O\}$ definită prin $h = f \circ g = g \circ f$, unde g este simetria axială în raport cu dreapta ℓ, iar f este inversiunea mai sus amintită.

2. Proprietăţi

(1) O dreaptă ce conţine polul O este transformată în simetrica ei faţă de dreapta ℓ.

(2) O dreaptă ce nu conţine polul O este transformată într-un cerc care trece prin polul O.

(3) Un cerc ce conţine polul O este transformat într-o dreaptă simetrică faţă de dreapta ℓ, paralelă cu tangenta la cerc în O.

(4) Un cerc ce nu conţine polul O este transformat într-un cerc ce nu conţine polul O.

(5) Un punct comun P aparţinând figurilor F_1 şi F_2 este transformat într-un punct comun P' al transformatelor figurilor.

(6) Punctul simetric al centrului unui cerc faţă de dreapta ℓ şi centrul cercului transformat sunt coliniare cu polul O.

(7) Două figuri tangente (cercuri sau drepte) rămân tangente după transformarea lor printr-o inversiune simetrică.

În următoarele exemple vom asocia unui triunghi ABC (cu vârfurile considerate în această ordine) inversiunea simetrică având polul A, puterea $r = AB \cdot AC$, iar dreapta ℓ fiind bisectoarea interioară a unghiului $\sphericalangle BAC$.

3. Exemple

Problema 1. *Fie ABC un triunghi înscris în cercul γ. Considerăm cercul ω_A tangent semidreptelor $(AB$, $(AC$ şi cercului γ în punctul A'. Definim analog punctele B' şi C'. Să se demonstreze că dreptele AA', BB' şi CC' sunt concurente.*

Lista scurtă BMO 2008, problema G5

[1)]Elev, Liceul Internaţional de Informatică, Bucureşti.

Soluţie. Vom arăta că dreptele AA', BB' şi CC' trec prin punctul izogonal conjugat cu punctul lui *Nagel* al triunghiului ABC.

Considerăm inversiunea simetrică asociată triunghiului ABC. Să observăm că B se interschimbă cu C, iar BC cu γ; vom nota $B \leftrightarrow C$ şi $BC \leftrightarrow \gamma$. Fie D transformatul punctului A' şi Ω_A transformatul cercului ω_A. Deoarece ω_A este tangent semidreptelor $(AB$, $(AC$ şi cercului γ în punctul A', după inversiunea simetrică obţinem cercul Ω_A, care este tangent semidreptelor $(AB$, $(AC$ şi dreptei BC în punctul D, A şi Ω_A fiind în semiplane opuse faţă de BC. Astfel, Ω_A este cerc exînscris în triunghiul ABC. Prin urmare $AA' \leftrightarrow AD$; cu alte cuvinte AD şi AA' sunt ceviene izogonale. Rezultă că dreapta AA' trece prin punctul izogonal conjugat punctului *Nagel* (punctul de concurenţă a cevienelor duse prin punctele de tangenţă ale cercurilor exînscrise), ceea ce încheie soluţia.

Problema 2. *Fie ABC un triunghi înscris în cercul γ. Fie D punctul diametral opus lui A în cercul γ. Dreptele DC şi AB se intersectează în punctul E, iar dreptele BD şi AC se intersectează în punctul F. Cercul circumscris γ' al triunghiului DEF retaie cercul γ în punctul M. Să se arate că punctul M aparţine simedianei din A în triunghiul ABC.*

Soluţie. Inversiunea simetrică ce corespunde triunghiului ABC produce interschimbările $B \leftrightarrow C$, $BC \leftrightarrow \gamma$. Notăm cu D', E', F', M' transformatele punctelor D, E, F, M. Dreptele $E - D - C$ şi $B - D - F$ se transformă în cercuri ce trec prin polul A.

Deoarece AD este diametrul cercului γ, avem $\sphericalangle ACD = \sphericalangle ABD = 90^\circ$. După transformare obţinem $\sphericalangle ABD' = \sphericalangle ACD' = 90^\circ$, prin urmare, în figura transformată, D' este piciorul înălţimii din A în triunghiul ABC.

Punctele E' şi F' aparţin dreptelor AC, respectiv AB, astfel încât patrulaterele $AE'D'B$ şi $AF'D'C$ sunt inscriptibile. Rezultă că $\sphericalangle AE'B = \sphericalangle AD'B = 90^\circ$, deci E' este piciorul înălţimii din B în triunghiul ABC. Analog F' este piciorul înălţimii din C în triunghiul ABC, deci γ' devine cercul lui *Euler* al triunghiului transformat. În consecinţă, punctul M' se află la intersecţia dreptei BC cu cercul lui *Euler* – altul decât D' –, deci M' este mijlocul laturii BC. Deoarece AM şi AM' sunt izogonale – din simetria faţă de bisectoarea unghiului A –, cerinţa este demonstrată.

Problema 3. *Fie ABC un triunghi. Cercul γ_1 trece prin punctele A şi B şi taie segmentul AC în punctul E. Cercul γ_2 trece prin punctele A şi C şi taie segmentul AB în punctul D, astfel încât dreapta DE este paralelă cu BC. Cercurile γ_1 şi γ_2 se intercetează în punctele A şi P. Să se arate că punctul P aparţine simedianei din A în triunghiul ABC.*

Soluţie. Este suficient că demonstrăm că, după o inversiune simetrică de pol A, punctul P se transformă într-un punct al medianei din A, deoarece mediana şi simediana formează unghiuri egale cu bisectoarea unghiului A. Fie C, B, E', D', P', γ_1', γ_2' transformatele lui B, C, E, D, P, γ_1, γ_2 prin inversiunea simetrică. Să observăm că γ_1' este o dreaptă ce conţine punctele C, P', E', iar γ_2' este o dreaptă ce conţine punctele P', D' şi B. Din paralelismul dreptelor DE şi BC avem $\dfrac{AE}{AC} = \dfrac{AD}{AB}$, deci $\dfrac{AE \cdot AE'}{AC \cdot AE'} = \dfrac{AD \cdot AD'}{AB \cdot AD'}$. Cum $AE \cdot AE' = AD \cdot AD' = AB \cdot AC$, obţinem $\dfrac{AB}{AE'} = \dfrac{AC}{AD'}$, adică $D'E'$ şi BC sunt paralele. În trapezul $BCD'E'$, intersecţia diagonalelor P' se află pe mediana din A a triunghiului ABC, ceea ce încheie demonstraţia.

Problema 4. *Fie P şi Q două puncte pe segmentul BC al triunghiului ascuţitunghic ABC cu proprietatea că $\sphericalangle PAB = \sphericalangle BCA$ şi $\sphericalangle CAQ = \sphericalangle ABC$. Pe dreptele AP şi AQ se consideră punctele M şi N astfel încât P este mijlocul lui AM şi Q este mijlocul lui AN. Să se arate că intersecţia dreptelor BM şi CN se află pe cercul circumscris triunghiului ABC.*

OIM 2014, problema 4 - generalizare

Soluţie. Notăm cu R intersecţia dreptelor BM şi CN. Este suficient să demonstrăm că transformatul R' al lui R se află pe dreapta BC – transformata cercului circumscris triunghiului ABC prin inversiunea simetrică asociată triunghiului ABC.

Fie M', N', P', Q', R' transformatele punctelor M, N, P, Q, R. Punctele P' şi Q' aparţin cercului circumscris triunghiului ABC. Să notăm că M' este mijlocul segmentului AP' şi N' este mijlocul segmentului AQ'. Punctul R' se află pe cercurile circumscrise triunghiurilor CAM' şi BAN'. Avem congruenţele de unghiuri $\sphericalangle CAP' = \sphericalangle BCA$ şi $\sphericalangle BAQ' = \sphericalangle ABC$, deci $CP' = AB$ şi $BQ' = AC$. Rezultă că triunghiurile ABC şi $CP'A$ sunt congruente, şi apoi triunghiurile ABC şi BAQ' sunt congruente. Congruenţa $\Delta CP'A \equiv \Delta BAQ'$ atrage congruenţele $\Delta CM'A \equiv \Delta BN'Q'$ şi $\Delta CM'P' \equiv \Delta BN'A$.

Cum $\sphericalangle BR'A = \sphericalangle BN'A$ şi $\sphericalangle CR'A = \sphericalangle CM'A = \sphericalangle BN'Q'$, deducem că $\sphericalangle BR'A + \sphericalangle CR'A = 180°$, de unde $R' \in (BC)$, ceea ce trebuia demonstrat.

Problema 5. *Patrulaterul convex $ABCD$ are $\sphericalangle ABC = \sphericalangle CDA = 90°$. Punctul H este piciorul perpendicularei din A pe BD. Punctele S şi T se află pe laturile (AB), respectiv (AD), astfel încât H se află în interiorul triunghiului SCT şi $\sphericalangle CHS - \sphericalangle CSB = 90°$, $\sphericalangle THC - \sphericalangle DTC = 90°$. Să se demonstreze că dreapta BD este tangentă la cercul circumscris triunghiului TSH.*

OIM 2014, problema 3

Soluţie. Notăm cu X a doua intersecţie a cercului circumscris triunghiului CHS cu dreapta AB şi cu Y a doua intersecţie a cercului circumscris triunghiului CHT cu dreapta AD. Observăm că

$90^\circ = \sphericalangle CHS - \sphericalangle CSB = (180^\circ - \sphericalangle CXS) - \sphericalangle CSB = \sphericalangle SCX.$

Astfel, SX este diametru al cercului circumscris triunghiului CHS, iar TY diametru al cercului circumscis triunghiului CHT.

În continuare vom demonstra că centrul cercului circumscris triunghiului TSH se află pe dreapta AH. Acest lucru va fi suficient deoarece $AH \perp BD$.

Efectuăm inversiunea simetrică asociată triunghiului ABD. Ştim deja că $H' = C$ şi $C' = H$. Din proprietatea 6, transformatul cercului CHS este un cerc cu centrul pe dreapta AD şi care trece prin punctele C şi H. Deducem astfel că transformatul cercului CHS este chiar cercul CHT şi vice-versa. De aici obţinem că $Y' = S$ şi $X' = T$.

Uitându-ne la relaţiile metrice, avem $AB \cdot AD = AS \cdot AY = AT \cdot AX$ deci $\dfrac{AS}{AT} = \dfrac{AX}{AY}$, de unde $ST \parallel XY$. Dacă notăm cu M respectiv N mijloacele segmentelor SX respectiv TY, obţinem că $ST \parallel MN$. Dar HC este axa radicală a cercurilor de diametre SX şi TY deci $HC \perp MN \implies HC \perp ST$. Astfel, CH trece prin ortocentrul triunghiului TSH şi, deoarece ortocentrul şi centrul cercului circumscris ale unui triunghi sunt conjugate izogonal, este suficient să demonstrăm că dreptele CH şi AH sunt simetrice faţă de bisectoarea unghiului $\sphericalangle SHT$. Pentru aceasta, este suficient să demonstrăm că $\sphericalangle AHS = 180^\circ - \sphericalangle CHT$. Să observăm că $180^\circ - \sphericalangle CHT = \sphericalangle CYT = \sphericalangle CYA$. Apoi, folosind relaţiile

$$AB \cdot AD = AH \cdot AC = AS \cdot AY \implies \frac{AH}{AS} = \frac{AY}{AC}, \quad \sphericalangle SAH = \sphericalangle CAY,$$

rezultă că triunghiurile ASH si ASY sunt asemenea, deci $\sphericalangle CYA = \sphericalangle AHS$, ceea ce trebuia demontrat.

Lăsăm cititorului spre rezolvare următoarele probleme:

Problema 6. *Fie ABC un triunghi. Cercul ω este tangent laturilor AB şi AC şi tangent interior cercului circumscris triunghiului în punctul A'. Să se arate că dreapta AA' trece prin punctul izogonal conjugat punctului Nagel al triunghiului ABC.*

Problema 7. *Triunghiul ABC este înscris in cercul γ, iar I este centrul cercului său înscrirs. Presupunem că dreapta perpendiculară pe AI şi care trece prin I intersectează latura AB în X. Cercul circumscris triunghiului BXC intersectează cercul γ a doua oară în V, iar cercul exînscris corespunzător vârfului A este tangent laturii BC în E.*

Să se arate că $\sphericalangle BAV = \sphericalangle CAE$.