ÎN LEGĂTURĂ CU NOTA MATEMATICĂ „ EXISTĂ, ÎNTR-ADEVĂR ?”

DAN SCHWARZ[1)]

Abstract. The idea taken into consideration is an elementary alternative to the method proposed in the paper quoted at the end

Keywords: logarithms, exponentials
MSC : 03-01

În GM-B nr. 5/2014 este analizată chestiunea **existenţei** unui triplet de numere de tipul celor din

Problema 1. *Dacă numerele reale x, y, z strict pozitive şi distincte satisfac egalităţile*

$$\frac{\ln x}{y-z} = \frac{\ln y}{z-x} = \frac{\ln z}{x-y}$$

atunci $x^x y^y z^z = 1$.

Remarcând că acele condiţii conduc (formal) şi la $xyz = 1$, autorul ajunge la un răspuns negativ, reducând chestiunea la Problema 2 de mai jos. Un atac direct este însă imediat; datorită simetriei circulare, egalităţile date se reduc la analizarea cazurilor de mai jos:

- dacă $x < y < z$, atunci:
  - dacă $y = 1$ atunci $x = z = 1$, absurd;
  - dacă $y < 1$ atunci $x > 1 > y$, absurd;
  - dacă $y > 1$ atunci $z < 1 < y$, absurd.
- dacă $x < z < y$, atunci:
  - dacă $z = 1$ atunci $x = y = 1$, absurd;
  - dacă $z < 1$ atunci $x > 1 > z$, absurd;
  - dacă $z > 1$ atunci $y < 1 < z$, absurd.

În continuarea Notei, se analizează

Problema 2. *Fie x, y, z numere reale strict pozitive astfel încât $xyz=1$ şi $x^x y^y z^z = 1$. Atunci $x = y = z = 1$.*

Soluţia propusă în Notă foloseşte funcţia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dată prin $f(t) = x^t + y^t + z^t$ pentru orice $t \in \mathbb{R}$: deoarece prima ei derivată se anulează în două puncte, există un punct c în care a doua derivată se anulează, iar existenţa lui c permite, în cele din urmă, obţinerea concluziei. □

Cele de mai sus sunt, într-un anume fel, un *overkill*, căci un argument imediat este faptul că pentru $u, v > 0$ cu $(u-1)(v-1) \geq 0$ avem $u^v \geq u$, cu egalitate doar pentru $u = 1$ sau $v = 1$; aşadar pentru $t > 0$ avem $t^t \geq t$,

[1)] Matematician, Bucureşti.

cu egalitate doar pentru $t = 1$. Prin urmare $1 = x^x y^y z^z \geq xyz = 1$, forţând $x = y = z = 1$. $\square$

Sunt lăsate spre rezolvare câteva probleme similare:

Tema 1. *Fie x, y, z numere reale strict pozitive astfel încât $xyz = 1$ şi $x^{x^2} y^{y^2} z^{z^2} = 1$. Atunci $x = y = z = 1$.*

Tema 2. *Fie x, y, z numere reale strict pozitive astfel încât $x^x y^y z^z = 1$ şi $x^{x^2} y^{y^2} z^{z^2} = 1$. Atunci $x = y = z = 1$.*

Tema 3. *Fie x, y, z numere reale strict pozitive astfel încât $x^x y^y z^z = 1$ şi $x^{yz} y^{zx} z^{xy} = 1$. Atunci $x = y = z = 1$.*

Tema 4. *Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ numere reale strict pozitive astfel încât $a_1 a_2 \cdots a_n = 1$ şi $a_1^{a_1} a_2^{a_2} \cdots a_n^{a_n} = 1$. Atunci $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 1$.*

Este evident că găsirea rezolvării cu metoda din Notă ţine (şi) de capacitatea de a „inventa" o funcţie[1)] care să folosească ipoteza şi să ducă la concluzie. Iată o soluţie în spiritul metodei noastre, la tema care ni se pare cel mai greu de rezolvat.

Soluţie pentru **Tema 3.**

Datorită simetriei, putem presupune $x \leq y \leq z$. Atunci în mod evident $x \leq 1 \leq z$, şi deci $x^{yz} \leq x^y \leq x^x$ şi $z^{xy} \leq z^y \leq z^z$.

• Dacă $y \leq 1$, atunci $x^{yz} y^{zx} = (x^y y^x)^z \leq x^y y^x \leq x^x y^y$, căci ultima inegalitate revine la $1 \leq x^{x-y} y^{y-x} = (y/x)^{y-x}$.

• Dacă $y \geq 1$, atunci $y^{zx} z^{xy} = (y^z z^y)^x \leq y^z z^y \leq y^y z^z$, căci ultima inegalitate revine la $1 \leq y^{y-z} z^{z-y} = (z/y)^{z-y}$.

În ambele cazuri $1 = x^{yz} y^{zx} z^{xy} \leq x^x y^y z^z = 1$, aşadar toate inegalităţile de mai sus sunt egalităţi, ceea ce forţează $x = y = z = 1$.

BIBLIOGRAFIE

[1] C. Mortici, *Există, într-adevăr?*, Gazeta Matematică – Seria B, nr. 5/2014.