GAZETA MATEMATICĂ

SERIA B

PUBLICAŢIE LUNARĂ PENTRU TINERET

Fondată în anul 1895

Anul CXIX nr. 5 **mai 2014**

ARTICOLE ŞI NOTE MATEMATICE

EXISTĂ, ÎNTR-ADEVĂR ?

CRISTINEL MORTICI[1)]

Abstract. The purpose of this note is to point that it is easy to overlook that the hypothesis of a problem must be consistent: there must exist objects which fulfill the requirements. In the end we leave to the reader some problems related to the matter taken into consideration.

Keywords: logarithms, exponentials

MSC : 03-01

Autorul acestei note îşi aduce aminte de o lucrare pe care regretatul profesor *Adrian Ghioca* a prezentat-o la una din ediţiile trecute ale Conferinţei S.S.M. Prahova de la Sinaia. Lucrarea – inspirat intitulată „Există oare?" – se referea la faptul că ipotezele unor probleme nu sunt totdeauna consistente.

Mai precis, se definesc numere reale cu ajutorul unor relaţii (egalităţi sau inegalităţi), însă la o analiză mai atentă se observă că de fapt nu există numere cu proprietăţile invocate. Profesorul *Adrian Ghioca* a dat exemple din geometrie unde se cerea să se demonstreze o anumită proprietate, în ipoteza în care într-un triunghi neechilateral anumite drepte sunt concurente. Problema era însă că dreptele respective sunt concurente numai dacă triunghiul este echilateral şi astfel ipoteza devine lipsită de esenţă. Din algebră a fost un exemplu de problemă despre un grup cu cel puţin două elemente cu o anumită proprietate, dar de fapt rezulta că grupul este format dintr-un singur element ...

Toate aceste probleme erau culese din reviste, culegeri sau chiar date în concursurile de matematică.

În această notă discutăm următoarea problemă care se poate găsi în excelenta lucrare [1, pag. 20] scrisă de profesorii constănţeni *Gheorghe Andrei,*

[1)]Prof. univ. dr. habilitat, Universitatea Valahia din Târgovişte

Constantin Caragea, *Gheorghe Bordea* şi regretatul profesor universitar *Ion Cucurezeanu*.

Problema 1. *Dacă numerele x, y, z strict pozitive şi distincte satisfac egalităţile*

$$\frac{\lg x}{y-z} = \frac{\lg y}{z-x} = \frac{\lg z}{x-y}, \tag{1}$$

atunci $x^x y^y z^z = 1$.

Aşa cum este menţionat în [1], această problemă a fost dată la etapa locală Constanţa a Olimpiadei de Matematică din 1979. După o părere personală, enunţul este atrăgător, pare o problemă frumoasă. Fiind solicitat să elaborez subiectele Concursului „Grigore Moisil", Ediţia a 29-a de la Oradea 2014, am fost pe punctul de a alege această problemă ca subiect la clasa a X-a. Când să mă gândesc la un exemplu de numere x, y, z strict pozitive şi distincte cu proprietatea (1) (folosind chiar noţiuni de matematică superioară), am avut dificultăţi şi evident am decis să renunţ la alegerea acestei probleme. Dificultăţile au continuat, deoarece am fost concentrat încă un timp (fără succes) în soluţionarea acestei probleme. Numai recent, ca urmare a unei inspiraţii de moment, am reuşit să rezolv problema (non)existenţei numerelor x, y, z şi mă felicit acum pentru (non)alegerea făcută. Acesta este şi motivul elaborării acestei note.

Soluţia formală a Problemei 1. Dacă notăm cu λ valoarea comună a fracţiilor (1), atunci

$$\lg x = \lambda(y-z), \quad \lg y = \lambda(z-x), \quad \lg z = \lambda(x-y). \tag{2}$$

Atunci

$$x \lg x + y \lg y + z \lg z = \lambda x(y-z) + \lambda y(z-x) + \lambda z(x-y) = 0,$$

iar concluzia rezultă din $\lg(x^x y^y z^z) = 0$.□

Prin adunarea egalităţilor (2), obţinem şi $xyz = 1$, deoarece

$$\lg x + \lg y + \lg z = \lambda(y-z) + \lambda(z-x) + \lambda(x-y) = 0.$$

Să revenim la subiectul lucrării noastre. Mai precis, ne punem întrebarea dacă există într-adevăr $x, y, z > 0$ (bineînţeles diferite două câte două) cu proprietatea (1). După cum vom vedea, răspunsul este negativ şi astfel Problema 1 se poate alătura celor prezentate de prof. *Adrian Ghioca*, fiind cu ipoteză fără esenţă ...

Dacă am presupune că există $x, y, z > 0$ diferite două câte două cu proprietatea (1), atunci ar trebui să avem şi

$$xyz = x^x y^y z^z = 1.$$

Dar aşa cum rezultă din Problema 2 următoare, în acest caz trebuie să avem neapărat $x = y = z = 1$, deci (1) este imposibilă.

Problema 2. *Fie x, y, z numere reale strict pozitive astfel încât $xyz = 1$ şi $x^x y^y z^z = 1$. Atunci $x = y = z = 1$.*

Soluţie. Definim funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ prin

$$f(t) = x^t + y^t + z^t, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Cum $f'(t) = x^t \ln x + y^t \ln y + z^t \ln z$, relaţiile $xyz = 1$ şi $x^x y^y z^z = 1$ se scriu sub forma $f'(0) = 0$, respectiv $f'(1) = 0$.

Conform teoremei lui *Rolle*, există $c \in (0, 1)$ astfel încât $f''(c) = 0$ sau echivalent

$$x^c \ln^2 x + y^c \ln^2 y + z^c \ln^2 z = 0.$$

Cum fiecare din cei trei termeni ai sumei este nenegativ iar suma este zero, trebuie să avem

$$x^c \ln^2 x = y^c \ln^2 y = z^c \ln^2 z = 0,$$

deci $x = y = z = 1$. □

În final vă propunem spre rezolvare un set de probleme. Poate soluţia Problemei 2 vă va inspira în rezolvarea acestora.

Tema 1. *Fie x, y, z numere reale strict pozitive astfel încât $xyz = 1$ şi $x^{x^2} y^{y^2} z^{z^2} = 1$. Demonstraţi că $x = y = z = 1$.*

Tema 2. *Fie x, y, z numere reale strict pozitive astfel încât $x^x y^y z^z = 1$ şi $x^{x^2} y^{y^2} z^{z^2} = 1$. Demonstraţi că $x = y = z = 1$.*

Tema 3. *Fie x, y, z numere reale strict pozitive astfel încât $x^x y^y z^z = 1$ şi $x^{yz} y^{zx} z^{xy} = 1$. Demonstraţi că $x = y = z = 1$.*

Tema 4. *Fie a_1, a_2, ..., a_n numere reale strict pozitive astfel încât $a_1 a_2 \cdots a_n = 1$ şi $a_1^{a_1} a_2^{a_2} \cdots a_n^{a_n} = 1$. Demonstraţi că $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 1$.*

Bibliografie

[1] Gh. Andrei, C. Caragea, I. Cucurezeanu, Gh. Bordea, *Probleme de Algebră pentru Concursuri de Admitere şi Olimpiade Şcolare*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1993.