PENTRU CERCURILE DE ELEVI

IMPORTANŢA MATRICEI ADJUNCTE ÎN ANUMITE PROBLEME DE OLIMPIADĂ

CIPRIANA ANGHEL[1)] şi GEORGE RAREŞ STAN[2)]

Pentru o matrice pătratică A, vom nota cu A^* matricea adjunctă. În prima parte a articolului vom arăta utilitatea următoarelor două leme, iar în partea a doua vom ilustra importanţa folosirii matricei adjuncte, chiar dacă aceasta nu apare în mod explicit în enunţ.

Lema 1. *Dacă* $\det A=0$, *atunci* A^* *are rangul* 0 *sau* 1, *iar* $\operatorname{rang}(A^*)=1$ *dacă şi numai dacă* $\operatorname{rang}(A) = n - 1$.

Demonstraţie. Din inegalitatea lui *Sylvester* avem

$$\operatorname{rang}(AA^*) \geq \operatorname{rang}(A) + \operatorname{rang}(A^*) - n.$$

Dar $AA^* = \det(A)\mathbb{I}_n = \mathbb{O}_n$, deci $\operatorname{rang}(AA^*) = 0$ şi obţinem

$$n \geq \operatorname{rang}(A) + \operatorname{rang}(A^*).$$

Caz 1: Dacă $\operatorname{rang}(A) = n - 1$, atunci $\operatorname{rang}(A^*) \leq 1$. Matricea A^* fiind nenulă în acest caz, rezultă $\operatorname{rang}(A^*) = 1$.

Caz 2: Dacă $\operatorname{rang}(A) \leq n - 2$, atunci orice minor de ordin $n - 1$ este nul şi deci $A^* = \mathbb{O}_n$.

Lema 2. *Dacă* A *are rangul* 1, *atunci* $A^2 = \operatorname{tr}(A)A$, *unde* $\operatorname{tr}(A)$ *reprezintă urma matricei* A.

Demonstraţie. Este binecunoscut faptul că, dacă $\operatorname{rang}(A) = 1$, atunci $A = CL$, unde C este o matrice coloană şi L este o matrice linie. Atunci $A^2 = (CL)^2 = C(LC)L = (LC)CL = (LC)A$. Deoarece LC este chiar $\operatorname{tr}(A)$, obţinem $A^2 = \operatorname{tr}(A)A$.

Aplicaţii

Problema 1. (Etapa locală Bucureşti, 2012) Fie $n \geq 2$ un număr natural şi $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ o matrice nenulă cu $\det(A) = 0$. Demonstraţi că dacă

$$A + A^* = \operatorname{tr}(A)\mathbb{I}_n,$$

atunci $n = 2$.

Soluţie. Cum $\det(A) = 0$ obţinem din lema 1 că $\operatorname{rang}(A^*) \in \{0, 1\}$.

Caz 1: $\operatorname{rang}(A^*) = 0$. Atunci $A^* = \mathbb{O}_n$, deci $A = \operatorname{tr}(A)\mathbb{I}_n$ şi $\det(A) = \operatorname{tr}(A)^n$. Dar $\det(A) = 0$ implică $\operatorname{tr}(A) = 0$, deci $A = \mathbb{O}_n$ – contradicţie.

Caz 2: $\operatorname{rang}(A^*) = 1$, deci $\operatorname{rang}(A) = n - 1$ (lema 1). Folosind lema 2 rezultă $(A^*)^2 = \operatorname{tr}(A^*)A^*$. Înmulţind în egalitatea din enunţ cu A^*, obţinem $AA^* + (A^*)^2 = \operatorname{tr}(A)A^*$. Cum $AA^* = \det(A)\mathbb{I}_n$ şi $\det(A) = 0$, vom avea

[1)] Elevă, Colegiul Naţional de Informatică „Tudor Vianu", Bucureşti

[2)] Elev, Colegiul Naţional de Informatică „Tudor Vianu", Bucureşti.

$\mathrm{tr}(A^*)A^* = \mathrm{tr}(A)A^*$, deci $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(A^*)$. Aplicând urma în relaţia iniţială rezultă $2\mathrm{tr}(A) = n\mathrm{tr}(A)$, de unde $\mathrm{tr}(A) = 0$ sau $n = 2$. Dacă $\mathrm{tr}(A) = 0$, atunci $A = -A^*$, deci $n-1 = \mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(-A^*) = \mathrm{rang}(A^*) = 1$ şi rezultă şi în acest caz $n = 2$.

Problema 2. (Etapa naţională, 2006) Fie A o matrice pătrată de ordin n, cu elemente numere complexe şi A^* matricea sa adjunctă. Demonstraţi că dacă există un număr natural $m \geq 1$ astfel încât $(A^*)^m = \mathbb{O}_n$, atunci $(A^*)^2 = \mathbb{O}_n$.

Soluţie. Fie λ o valoare proprie a lui A^*. Cum $(A^*)^m = \mathbb{O}_n$, deducem $\lambda^m = 0$, deci $\lambda = 0$. Dar $\mathrm{tr}(A^*)$ este suma valorilor proprii ale lui A^*, deci $\mathrm{tr}(A^*) = 0$.

Din ipoteză rezultă că $\det(A^*) = 0$. Dar $A \cdot A^* = \det(A) \cdot \mathbb{I}_n$ şi, trecând la determinant, obţinem $\det(A) \cdot \det(A^*) = \det(A)^n$, de unde $\det(A) = 0$. Din lema 1, avem următoarele 2 cazuri.

Caz 1: Dacă $\mathrm{rang}(A^*) = 0$, atunci $A^* = \mathbb{O}_n$ şi concluzia este evidentă.

Caz 2: Dacă $\mathrm{rang}(A^*) = 1$, putem aplica lema 2 şi obţinem $(A^*)^2 = \mathrm{tr}(A^*)A^*$. Dar $\mathrm{tr}(A^*) = 0$ şi atunci $(A^*)^2 = \mathbb{O}_n$.

Problema 3. (Etapa naţională, 2013) Fie A o matrice neinversabilă de ordin n cu elemente reale, $n \geq 2$, şi fie A^* adjuncta matricii A. Arătaţi că $\mathrm{tr}(A^*) \neq -1$ dacă şi numai dacă matricea $\mathbb{I}_n + A^*$ este inversabilă.

Soluţie. Avem $\det(A) = 0$. Folosind lema 1, obţinem că $\mathrm{rang}(A^*) = 0$ sau $\mathrm{rang}(A^*) = 1$.

Caz 1: $\mathrm{rang}(A^*) = 0$. În acest caz $A^* = \mathbb{O}_n$ şi ambele condiţii sunt adevărate.

Caz 2: $\mathrm{rang}(A^*) = 1$. Folosind lema 2, avem $(A^*)^2 = \mathrm{tr}(A^*) \cdot A^*$, (1).

„$\Longrightarrow$". Presupunem prin reducere la absurd că $\det(A^* + \mathbb{I}_n) = 0$. Atunci -1 este valoare proprie pentru A^*. Cum orice valoare proprie este rădăcină a polinomului minimal a lui A^* (teorema lui *Frobenius*), deci şi a oricărui polinom p care are proprietatea $p(A) = \mathbb{O}_n$, deducem, conform (1), că -1 este rădăcină a polinomului $X^2 - \mathrm{tr}(A^*)X$, adică $(-1)^2 - \mathrm{tr}(A^*) \cdot (-1) = 0$. Astfel $\mathrm{tr}(A^*) = -1$, ceea ce contrazice ipoteza implicaţiei, deci presupunerea făcută este falsă.

„$\Longleftarrow$". Presupunem prin reducere la absurd că $\mathrm{tr}(A^*) = -1$. Cum A^* şi $\mathbb{I}_n$ comută, $(A^* + \mathbb{I}_n)^2 = (A^*)^2 + 2A^* + \mathbb{I}_n = (\mathrm{tr}(A^*) + 2) \cdot A^* + \mathbb{I}_n$ (am înlocuit $(A^*)^2$ din relaţia (1)). Cum $\mathrm{tr}(A^*) = -1$, obţinem $(A^*)^2 + 2A^* + \mathbb{I}_n = (\mathrm{tr}(A^*)+2) \cdot A^* + \mathbb{I}_n = A^* + \mathbb{I}_n$, adică $(A^*)^2 + A^* = \mathbb{O}_n$, sau $A^*(A^* + \mathbb{I}_n) = \mathbb{O}_n$. Dar $A^* + \mathbb{I}_n$ este inversabilă, deci obţinem $A^* = \mathbb{O}_n$, ceea ce contrazice presupunerea că $\mathrm{tr}(A^*) = -1$. Aşadar $\mathrm{tr}(A^*) \neq -1$.

Problema 4. (Etapa naţională, 2012) Fie n şi k două numere naturale astfel încât $n \geq 2$ şi $1 \leq k \leq n-1$. Arătaţi că dacă matricea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ are exact k minori nuli de ordin $n-1$, atunci $\det(A) \neq 0$.

Soluţie. Presupunem prin reducere la absurd că $\det A = 0$. Atunci $\mathrm{rang}(A) \leq n-1$. Dacă $\mathrm{rang}(A) \leq n-2$, atunci ar exista n^2 minori de ordin $n-1$ nuli, imposibil. Aşadar $\operatorname{rang}(A)=n-1$ şi, folosind lema 1, avem $\operatorname{rang}(A^*)=1$, deci toate coloanele matricei A^* sunt proporţionale. Cum A are exact k minori de ordin $n-1$ nuli, matricea A^* are exact k elemente egale cu 0. Uitându-ne la un astfel de element nul, şi folosindu-ne de proporţionalitatea coloanelor, obţinem că matricea A^* are o linie nulă, deci există cel puţin n elemente nule, contradicţie.

În următoarele 3 probleme cerinţa nu face referire la matricea adjunctă, dar utilizarea ei conduce la soluţii elegante.

Problema 5. (Problema 2.17 din [1]) Să se arate că, dacă într-un determinant de ordin $n \geq 2$ toţi minorii de un anumit ordin $k<n$ sunt egali, atunci determinantul este nul.

Soluţie. Este suficient să arătăm că dacă toţi minorii de ordin $n-1$ dintr-un determinant de ordin n sunt egali, atunci acesta este nul (aplicăm acest fapt pentru a obţine că minorii de ordin $k+1$ sunt nuli, ceea ce implică evident faptul ca determinantul de ordin n este nul). Fie A determinantul de ordin n. Presupunem că toţi minorii de ordin $n-1$ sunt egali cu Γ. Atunci

$$A^*=\begin{pmatrix} \Gamma & -\Gamma & \Gamma & \dots \\ -\Gamma & \Gamma & -\Gamma & \dots \\ \dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots \\ \pm\Gamma & \mp\Gamma & \pm\Gamma & \dots \end{pmatrix}.$$

Adunând linia a 2-a la prima vom obţine o linie nulă, ceea ce înseamnă că $\det(A^*)=0$. Cum $AA^*=\det(A)\mathbb{I}_n$, deducem $\det(A)=0$.

Problema 6. (Etapa naţională, 1997) Fie A o matrice pătratică de ordin impar (cel puţin egal cu 3), cu elemente numere întregi impare. Să se arate că dacă A este inversabilă, atunci nu este posibil ca toţi minorii elementelor unei linii să aibă modulele egale.

Soluţie. Fie A^* adjuncta matricei A. Presupunem prin reducere la absurd că toţi minorii elementelor de pe linia i din matricea A au acelaşi modul Γ. Rezultă astfel că toate elementele de pe coloana i din matricea A^* vor aparţine mulţimii $\{\pm\Gamma\}$.

Cum $\det(A)\mathbb{I}_n=AA^*$, deducem $0=\Gamma\sum\limits_{j=1}^{n}(\pm 1)a_{kj}$ (am egalat elementele de pe linia k şi coloana i din matricele $\det(A)\mathbb{I}_n$ şi AA^*, unde $k\neq i$).

Dar $\sum\limits_{j=1}^{n}(\pm 1)a_{kj}$ este o sumă cu un număr impar de termeni impari, aşadar obţinem $\Gamma=0$.

Egalând de această dată elementele de pe linia i şi coloana i din aceleaşi matrice, obţinem $\det(A)=\Gamma\sum\limits_{j=1}^{n}(\pm 1)a_{ij}$, deci $\det(A)=0$, contradicţie.

Problema 7. (Etapa naţională, 2011) Spunem că o linie a unei matrice din $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ este permutabilă dacă oricum am permuta între ele elementele acelei linii, valoarea determinantului nu se schimbă. Arătaţi că, dacă o matrice are două linii permutabile, atunci determinantul său este nul.

Soluţie. Cum $AA^* = \det A \mathbb{I}_n$, deci $\det A \det A^* = (\det A)^n$, este suficient să arătăm că $\det A = 0$ sau că $\det(A^*) = 0$. Considerăm că matricea A are linia i permutabilă şi fie a_{ij} şi a_{ik} două elemente. Atunci determinantul matricei A nu se schimbă dacă inversăm cele două elemente. Astfel obţinem, dezvoltând după linia i

$$\begin{aligned}\det A &= a_{i1}\Gamma_{i1} + a_{i2}\Gamma_{i2} + \ldots + a_{ij}\Gamma_{ij} + \ldots + a_{ik}\Gamma_{ik} + \ldots + a_{in}\Gamma_{in} = \\ &= a_{i1}\Gamma_{i1} + a_{i2}\Gamma_{i2} + \ldots + a_{ik}\Gamma_{ij} + \ldots + a_{ij}\Gamma_{ik} + \ldots + a_{in}\Gamma_{in},\end{aligned}$$

de unde rezultă $0 = a_{ij}\Gamma_{ij} + a_{ik}\Gamma_{ik} - a_{ik}\Gamma_{ij} - a_{ij}\Gamma_{ik} = (a_{ij} - a_{ik}) \cdot (\Gamma_{ij} - \Gamma_{ik})$, deci $a_{ij} = a_{ik}$ sau $\Gamma_{ij} = \Gamma_{ik}$. Dacă pe linia permutabilă există două elemente diferite, obţinem că acestea au complemenţii algebrici egali. Alegând arbitrar un al treilea element, acesta va fi diferit de măcar unul dintre celelalte două, şi deci complementul său va fi egal cu complementele celorlalte două elemente. Aşadar distingem următoarele două cazuri: ori toate elementele de pe linia permutabilă sunt egale, ori toţi complemenţii algebrici ai elementelor de pe linia permutabilă sunt egali.

În problemă matricea are două linii permutabile, aşadar ne vom situa în unul dintre următoarele trei cazuri.

Caz 1: Fiecare dintre cele două linii permutabile are elementele egale; atunci evident $\det A = 0$.

Caz 2: Fiecare dintre cele două linii are complemenţii algebrici ai elementelor egali. Atunci A^* are două coloane proporţionale, deci $\det(A^*) = 0$.

Caz 3: Pe una dintre liniile permutabile (fie aceasta i) avem toate elementele egale cu a, şi complemenţii elementelor de pe cealaltă linie (fie aceasta j) sunt egali cu Γ. Atunci elementul de pe linia i şi coloana j din matricea produs AA^* este egal cu $na\Gamma$. Dar, ţinând cont că $AA^* = \det A \mathbb{I}_n$ şi $i \neq j$, acest element va fi egal şi cu 0. Astfel obţinem $a = 0$ (caz în care $\det A = 0$) sau $\Gamma = 0$ (caz în care $\det A^* = 0$).

Bibliografie

[1] V. Pop, *Algebră liniară -matrice şi determinanţi- pentru elevi, stundenţi şi concursuri*, Editura Mediamira, Cluj, 2007.

[2] Colecţia Gazeta Matematică.