

Clasa a IX-a

13. Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ o progresie geometrică cu $a_1 = 3$ și rația $q = \sqrt{2}$. Determinați numărul termenilor raționali ai progresiei, mai mici sau egali cu 192.

14. Arătați că $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{n(n+2)} < \frac{3}{4}$, oricare ar fi numărul natural nenul n .

15. Arătați că funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1)$, definită prin $f(x) = \{\sqrt{2x}\}$ este periodică.

16. Determinați valorile reale ale lui a pentru care graficul funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + a$, taie axa Ox într-un punct de abscisă strict pozitivă.

17. Determinați valorile reale ale lui a pentru care graficul funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + 4$, are o axă de simetrie perpendiculară pe axa Ox .

18. Determinați valorile reale ale lui a știind că vârful parabolei asociate funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2ax + 2$ se află pe prima bisectoare a axelor.

Clasa a X-a

19. Să se rezolve ecuația $2 \sin x + \cos 2x = 1$.

20. Să se calculeze $\sin \left(\arctg \frac{1}{2} + \arccos \frac{3}{4} \right)$.

21. Să se rezolve inecuația $\cos x - \sin x \geq 1$.

22. Fie $f(x) = x^2 + x + 1$, $x \in \mathbb{C}$. Să se calculeze

$$f(1)f(\varepsilon)f(\varepsilon^2) \cdot \dots \cdot f(\varepsilon^{2013}),$$

unde $\varepsilon = \cos \frac{\pi}{1007} + i \sin \frac{\pi}{1007}$.

23. Să se determine numărul elementelor mulțimii

$$\{z \in \mathbb{C} \mid z^9 = 1\} \cup \{z \in \mathbb{C} \mid z^{15} = -1\}.$$

24. Să se determine numărul funcțiilor impare

$$f : \{-2, -1, 0, 1, 2\} \rightarrow \{-2, -1, 0, 1, 2\}.$$

Clasa a XI-a

25. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 2a-1 & 2b & 2c \\ 2c & 2a-1 & 2b \\ 2b & 2c & 2a-1 \end{pmatrix}$, cu $a, b,$

c numere întregi.

a) Calculați determinantul matricei A pentru $a = b = c = 1$.

b) Arătați că rangul lui A este 3.

$$\text{c) Rezolvați sistemul } \begin{cases} ax + by + cz = \frac{1}{2}x \\ cx + ay + bz = \frac{1}{2}y \\ bx + cy + az = \frac{1}{2}z. \end{cases}$$

26. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} - \operatorname{arctg}x.$$

a) Scrieți ecuația asimptotei spre $-\infty$ a graficului funcției f .

b) Arătați că funcția f este monoton descrescătoare.

c) Calculați $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(f(x) - \frac{\pi}{2} \right)^x$.

Clasa a XII-a

27. Se consideră polinomul $f = X^3 - 12X + a$, unde a este un număr real și $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$ rădăcinile lui f .

a) Determinați valorile reale ale lui a știind că f se divide cu $X - 2$.

b) Determinați rădăcinile x_1, x_2 și x_3 știind că $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -48$.

c) Determinați valorile reale ale lui a știind că f are o rădăcină dublă.

28. Pentru fiecare număr natural nenul n notăm $I_n = \int_0^2 \frac{x^n}{2x + 1} dx$.

a) Calculați I_1 .

b) Arătați că $2I_{n+1} + I_n = \frac{2^{n+1}}{n+1}$.

c) Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$.