PROBLEME

PROBLEME PROPUSE

PROBLEME PENTRU EXAMENE NAŢIONALE[1)]

Clasa a VII-a

1. Ordonaţi crescător numerele $a = \dfrac{6}{5}, b = \dfrac{12}{11}$ şi $c = \dfrac{4}{3}$.

2. Determinaţi numărul întreg a ştiind că soluţia ecuaţiei $ax - 2 = 0$ este $\dfrac{2}{3}$.

3. Arătaţi că dacă $a = 2 + \sqrt{3}$, atunci numărul $A = 4a - a^2$ este întreg.

4. Determinaţi cel mai mare număr întreg k pentru care $|2k - 1| \leq 8$.

5. Se consideră un triunghi ABC şi punctele $M \in (AB)$, $N \in (AC)$ astfel încât $AM = 3 \cdot MB$ şi $4 \cdot AN = 3 \cdot AC$. Demonstraţi că dreptele MN şi BC sunt paralele.

6. Se consideră un trapez $ABCD$ $(AB||CD, AB > CD)$ în care $M \in (AB)$ astfel încât $DM \perp AB$, iar N şi P sunt mijloacele diagonalelor (BD), respectiv (AC). Arătaţi că $PN||AB$.

Clasa a VIII-a

7. Calculaţi partea întreagă a numărului $a = \dfrac{4}{\sqrt{5} - 1}$.

8. Se consideră mulţimea $H = \left\{a + b\sqrt{2} | a, b \in \mathbb{Z}\right\}$.
Arătaţi că $\sqrt{6 + 4\sqrt{2}} \in H$.

9. Determinaţi numărul întreg k ştiind că $(-2; 5] \cap [k; 6) = [1; 3k + 2]$.

10. Se consideră numerele reale x şi y, $x > y$, pentru care $x^2 + y^2 = 34$ şi $x + y = 8$. Arătaţi că $d = x - y$ este număr întreg.

11. Se notează cu O centrul pătratului $ABCD$ în care $AB = 6$. Pe planul pătratului se ridică perpendiculara EA, cu $EA = 8$. Calculaţi distanţa dintre punctele E şi O.

12. Calculaţi aria unei feţe laterale a unei piramide triunghiulare regulate $VABC$ în care feţele laterale sunt triunghiuri dreptunghice în V şi $AB = 6$.

[1)] La problemele din această rubrică nu se primesc soluţii. (N.R.)

Clasa a IX-a

13. Se consideră mulţimea $A_n = \{1, 3, 5, \ldots, 2n-1\}, n \in \mathbb{N}^*$. Arătaţi că suma elementelor mulţimii A_{50} este un număr pătrat perfect.

14. Toate numerele naturale sunt colorate cu roşu sau cu albastru, fiecare cu o singură culoare. Se ştie că dacă un număr x este roşu, atunci şi numărul $x+4$ este tot roşu, iar dacă un număr y este albastru, atunci şi $y+6$ este tot albastru. Arătaţi că dacă numărul 6 este roşu, atunci şi numărul 16 este tot roşu.

15. Determinaţi b_5 dacă în progresia geometrică $(b_n)_{n\geq 1}$ se ştie că $4b_2 + b_1 = 16b_3 - b_1 = 3$.

16. Arătaţi că dacă $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ verifică egalitatea $ac = 2(b+d)$, atunci cel puţin una dintre ecuaţiile $x^2 + ax + b = 0$ şi $x^2 + cx + d = 0$ are soluţiile reale.

17. Vom spune că o funcţie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este *normală* dacă există $a, b \in \mathbb{Z}, a \neq b$, astfel încât $f(a) + f(b) = 0$. Pentru $k \in \mathbb{Z}$ se consideră funcţiile $f_k, g_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_k(x) = 2x - k$ şi $g_k(x) = k - 3x$. Arătaţi că pentru orice număr întreg k funcţia f_k este *normală* şi, pe de altă parte, arătaţi că există numere întregi k pentru care funcţia g_k nu este *normală* .

18. Calculaţi lungimea vectorului $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$, ştiind că $ABCD$ este un dreptunghi cu lungimile laturilor egale cu 6, respectiv 8.

Clasa a X-a

19. Calculaţi $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2} + \operatorname{arctg}\dfrac{1}{3}$.

20. Demonstraţi că funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 4x - 3$ este inversabilă. Dacă $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este inversa sa, calculaţi $g(5)$.

21. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia

$$2 \cdot \log_4(x+1) + \log_2(x-1) = 3.$$

22. Precizaţi natura triunghiului ale cărui vârfuri au afixele $a = 2$, $b = 4 + i$, $c = 4i$.

23. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2^{x+2} = \dfrac{4}{x+1}$.

24. Determinaţi cel mai mic număr natural n pentru care $8^{\log_2 \sqrt[6]{10}} < n$.

Clasa a XI-a

25. Se consideră sistemul de ecuaţii $\begin{cases} 2x+y+mz=m \\ 3x-my+4z=1 \\ x+z=1 \end{cases}$, unde $m \in \mathbb{R}$. Se notează cu A, respectiv $\overline{A}$ matricea sistemului, respectiv matricea extinsă a acestuia.

a) Rezolvaţi sistemul în cazul în care $m=0$.

b) Arătaţi că, pentru orice $k \in \mathbb{Z}$, există $m \in \mathbb{Z}$ astfel încât $\det A = k^2$.

c) Demonstraţi că, pentru orice $m \in \mathbb{R}$, matricea extinsă $\overline{A}$ are rangul egal cu 3.

26. Calculaţi următoarele limite de funcţii:

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2-4x+3}{\sqrt{x+3}-2}$;

b) $\lim\limits_{x \to \infty} x \cdot \sin \dfrac{\pi}{2x}$;

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4^x+5^x-2}{\sin 3x}$.

Clasa a XII-a

27. Se consideră mulţimea $G=(-1,1)$ şi, notând, pentru orice $x,y \in G$, $x * y = \dfrac{x+y}{1+xy}$, presupunem cunoscut faptul că $(G,*)$ este un grup. De asemenea, pentru orice $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ notăm $x_n = \dfrac{1}{2n^2-1}$.

a) Arătaţi că $f : G \to (0,\infty)\,, f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$este un izomorfism între grupurile $(G,*)$ şi $\left(\mathbb{R}_+^*, \cdot\right)$.

b) Demonstraţi că $f(x_2)f(x_3) \cdot \ldots \cdot f(x_n) = \dfrac{n+1}{2n}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

c) Calculaţi $A_n = \dfrac{1}{7} * \dfrac{1}{17} * \dfrac{1}{31} * \ldots * \dfrac{1}{2n^2-1}, n \geq 2$.

28. Se consideră funcţiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}, \qquad g(x) = \int_{-x}^{x} f(t) \cos t \mathrm{d}t.$$

a) Calculaţi $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

b) Determinaţi $g'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

c) Calculaţi $g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.