MONOTONIA ŞI CONVERGENŢA UNOR ŞIRURI RECURENTE

NICOLAE BOURBĂCUŢ[1)]

Abstract. Given a real-valued function, we consider three real sequences defined as convex combinations. For a increasing function we infer the sequences are monotonic, while for a continuous function we have convergent sequences. Some applications are presented.

Keywords: Recursive sequences, iterations, monotony, convergence, fixed points.

MSC : 40A05

1. Introducere

Şirurile recurente ocupă un loc aparte în matematică, iar în Analiza Matematică pe axa reală importanţa lor este considerabilă atât din punct de vedere teoretic, cât şi practic.

Cel mai răspândit şir recurent în Analiza Matematică este şirul aproximaţiilor succesive (sau şirul iteraţiilor simple sau, încă, iteraţia *Picard*). El se defineşte astfel: dacă X este o submulţime a lui $\mathbb{R}$, $f : X \to X$ o funcţie şi $a \in X$ atunci şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definit prin $x_0 = a$ şi $x_{n+1} = f(x_n)$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ se numeşte şirul aproximaţiilor succesive generat de a şi funcţia f.

Acest tip de şiruri are aplicaţii numeroase în teoreme de punct fix, în teoria sistemelor dinamice, în rezolvarea cu aproximaţie a ecuaţiilor algebrice sau transcendente.

În acest articol ne vom ocupa de studiul a trei tipuri de şiruri recurente care sunt legate între ele.

Peste tot, în cele ce urmează, I este un interval nedegenerat al axei reale, $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir de numere strict pozitive, $f : I \to I$ o funcţie, a, b, c trei numere din I, iar $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sunt şirurile definite după cum urmează:

$$\text{(a)} \quad a_0 = a, \quad a_{n+1} = f\left(\frac{p_0 a_0 + \ldots + p_n a_n}{p_0 + \ldots + p_n}\right),\ n \in \mathbb{N}$$

$$\text{(b)} \quad b_0 = b, \quad b_{n+1} = \frac{p_0 f(b_0) + \ldots + p_n f(b_n)}{p_0 + \ldots + p_n},\ n \in \mathbb{N}$$

$$\text{(c)} \quad c_0 = c, \quad c_{n+1} = \left(1 - \frac{p_n}{p_0 + \ldots + p_n}\right) c_n + \frac{p_n}{p_0 + \ldots + p_n} f(c_n),\ n \in \mathbb{N}.$$

Să observăm că, deoarece I este interval şi $f : I \to I$, şirurile din recurenţele (a), (b), (c) sunt bine definite.

Dacă $p_n = 1$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, recurenţa (c) se numeşte iteraţie *Mann* (a se vedea [3] sau [4]) şi are forma

[1)] Grup de profesori, jud. Hunedoara.

(m) $$c_0 = c, \quad c_{n+1} = \frac{n}{n+1} c_n + \frac{1}{n+1} f(c_n),\ n \in \mathbb{N}.$$

2. Monotonia iteraţiilor (a), (b), (c)

În cele ce urmează vom dovedi că, dacă funcţia f din introducere este crescătoare, atunci şirurile $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sunt monotone. Pentru scopul propus avem nevoie de următoarea lemă.

Lema 2.1. *În condiţiile de mai sus, dacă $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir monoton, atunci şirul $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definit prin*

$$\sigma_n = \frac{p_0 x_0 + \ldots + p_n x_n}{p_0 + \ldots + p_n},\ n \in \mathbb{N}$$

este monoton şi are aceeaşi monotonie cu şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Şirul $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se numeşte şirul medie ponderată *Cesàro* a şirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cu ponderile $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Demonstraţie. Putem admite că $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este crescător (celălalt caz se tratează similar). Atunci, pentru orice $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\sigma_{n+1} &= \frac{p_0 + \ldots + p_n}{p_0 + \ldots + p_{n+1}} \cdot \frac{p_0 x_0 + \ldots + p_n x_n}{p_0 + \ldots + p_n} + \frac{p_{n+1}}{p_0 + \ldots + p_{n+1}} x_{n+1} \\ &= \alpha \sigma_n + (1 - \alpha)\, x_{n+1}\end{aligned}$$

cu $\alpha \in (0, 1)$. Cum $\sigma_n \le x_{n+1}$, ultima egalitate ne conduce la $\sigma_{n+1} \ge \sigma_n$, ceea ce atrage faptul că $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este crescător.

Propoziţia 2.2. *Dacă funcţia $f : I \to I$ este crescătoare, atunci pentru orice $a, b, c \in I$ şirurile definite de iteraţiile $(a), (b), (c)$ sunt monotone.*

Demonstraţie. Avem $a_1 = f(a_0)$. Dacă $a_0 \le f(a_0)$ atunci $a_0 \le a_1$ şi vom dovedi că şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este crescător, adică $a_n \le a_{n+1}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Pentru $n = 0$ afirmaţia fiind adevărată, admitem că este adevărată până la un $n \in \mathbb{N}$ şi demonstrăm că este adevărată şi pentru $n + 1$. Din ipoteză avem că $a_0 \le a_1 \le \ldots \le a_{n+1}$ şi atunci, cu Lema 2.1,

$$\frac{p_0 a_0 + \ldots + p_n a_n}{p_0 + \ldots + p_n} \le \frac{p_0 a_0 + \ldots + p_n a_n + p_{n+1} a_{n+1}}{p_0 + \ldots + p_n + p_{n+1}}$$

ceea ce, împreună cu monotonia funcţiei f, conduce la $a_{n+1} \le a_{n+2}$ şi, în concluzie, inducţia matematică impune că şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este crescător.

Dacă $a_0 > f(a_0)$ se procedează analog.

Pentru iteraţia (b) avem $b_1 = f(b_0)$. Dacă $b_1 \le f(b_0)$ atunci $b_0 \le b_1$. Vom proba că $b_n \le b_{n+1}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Pentru $n = 0$ afirmaţia este adevărată. Admitem afirmaţia adevărată până la un $n \in \mathbb{N}$ şi demonstrăm că este adevărată şi pentru $n + 1$. Cum funcţia f este crescătoare, deducem că $f(b_0) \le f(b_1) \le \ldots \le f(b_n) \le f(b_{n+1})$ şi atunci din Lema 2.1 obţinem

$$\frac{p_0 f(b_0) + \ldots + p_n f(b_n)}{p_0 + \ldots + p_n} \le \frac{p_0 f(b_0) + \ldots + p_n f(b_n) + p_{n+1} f(b_{n+1})}{p_0 + \ldots + p_n + p_{n+1}},$$

adică $b_{n+1} \le b_{n+2}$, ceea ce dovedeşte justeţea afirmaţiei noastre şi pentru $n+1$ şi, în concluzie, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este crescător. Cazul $b_0 > f(b_0)$ se tratează analog.

Şirul $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ verifică relaţia $c_{n+1}(p_0+\ldots+p_n) = c_n(p_0+\ldots+p_{n+1}) + p_n f(c_n)$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ de unde, adunând aceste egalităţi de la 1 la n, deducem că $c_{n+1}(p_0+\ldots+p_n) = c_1 p_0 + p_1 f(c_1) + \ldots + p_n f(c_n)$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ adică $c_{n+1} = \dfrac{p_0 f(c_0) + \ldots + p_n f(c_n)}{p_0+\ldots+p_n}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, deoarece $c_1 = f(c_0)$. Astfel $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ verifică o relaţie de recurenţă asemănătoare cu cea pentru $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi demonstrăm ca mai sus că este monoton.

Corolarul 2.3. *Dacă $f : I \to I$ este o funcţie crescătoare, x, y, z sunt din I, iar $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}, (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sunt şirurile definite astfel:*

$$x_0 = x, \quad x_{n+1} = f\left(\frac{x_0+x_1+\ldots+x_n}{n+1}\right), \ n \in \mathbb{N}$$

$$y_0 = y, \quad y_{n+1} = \frac{f(y_0)+\ldots+f(y_n)}{n+1}, \ n \in \mathbb{N}$$

$$z_0 = z, \quad z_{n+1} = \frac{n}{n+1} z_n + \frac{1}{n+1} f(z_n), \ n \in \mathbb{N}$$

atunci şirurile $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}, (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sunt monotone.

Demonstraţie. Luăm, în Propoziţia 2.2, $p_n = 1$ şi concluzia se impune.

Observaţia 2.4. Dacă în Propoziţia 2.2 funcţia f este descrescătoare, rezultatul nu mai rămâne adevărat. De exemplu, fie $I = [0,1]$ şi funcţia $f : [0,1] \to [0,1]$ definită prin $f(x) = 1-x$ pentru orice $x \in [0,1]$, $p_n = 1$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ şi $a = b = c = 1$. Atunci $a_0 = b_0 = c_0 = 1$ şi $a_1 = f(a_0) = b_1 = f(b_0) = c_1 = f(c_0) = 0$ iar

$$a_2 = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}, b_2 = \frac{f(b_0)+f(b_1)}{2} = \frac{1}{2}, c_2 = \frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{2}f(c_1) = \frac{1}{2}.$$

Astfel $a_2 > a_1 < a_0, b_2 > b_1 < b_0, c_2 > c_1 < c_0$, adică cele trei şiruri nu sunt monotone.

Observaţia 2.5. În cazul în care intervalul I este mărginit, iteraţiile din Propoziţia 2.2 şi din Corolarul 2.3 sunt convergente, conform criteriului lui *Weierstrass*.

3. Convergenţa iteraţiilor (a), (b), (c) în prezenţa continuităţii

În cele ce urmează vom prezenta rezultatele legate de convergenţa iteraţiilor (a), (b), (c) în cazul în care monotonia se înlocuieşte cu continuitatea, iar intervalul I cu un interval închis şi mărginit al axei reale. Pentru scopul propus avem nevoie de următorul rezultat din [1], datorat lui *D. Borwein* şi *J. Borwein*.

Teorema 3.1. *Fie $a, b \in \mathbb{R}$, cu $a < b$, $f : [a,b] \to [a,b]$ o funcţie continuă pe $[a,b]$, $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir cu $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = 0$ şi $t_n \in [0,1]$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Dacă $x \in [a,b]$ şi $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este şirul definit prin recurenţa*

$$x_0 = x, \quad x_{n+1} = (1 - t_n)\, x_n + t_n f(x_n), \ n \in \mathbb{N},$$

atunci şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent.

În plus, dacă $\lim\limits_{n\to\infty} (t_0 + t_1 + \ldots + t_n) = \infty$, atunci limita lui $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este punct fix al funcţiei f.

O generalizare a acestui rezultat se poate găsi în [2].

Principalul rezultat al acestui paragraf este cuprins în următoarea propoziţie.

Propoziţia 3.2. *Dacă funcţia $f : I \to I$ este continuă şi*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{p_0 + \ldots + p_n} = 0,$$

atunci, pentru orice a, b, $c \in I$, iteraţiile (a), (b), (c) *definesc şiruri convergente.*

Demonstraţie. Pentru recurenţa (c) aplicăm Teorema 3.1, în care luăm $t_n = \dfrac{p_n}{p_0 + \ldots + p_n}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Pentru recurenţa (a), fie $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şirul definit prin

$$d_n = \frac{p_0 a_0 + \ldots + p_n a_n}{p_0 + \ldots + p_n},$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Atunci $a_{n+1} = f(d_n)$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ şi

$$\begin{aligned} d_{n+1} &= \frac{p_0 + \ldots + p_n}{p_0 + \ldots + p_{n+1}} \cdot \frac{p_0 a_0 + \ldots + p_n a_n}{p_0 + \ldots + p_n} + \frac{p_{n+1}}{p_0 + \ldots + p_{n+1}} a_{n+1} = \\ &= \left(1 - \frac{p_{n+1}}{p_0 + \ldots + p_{n+1}}\right) d_n + \frac{p_{n+1}}{p_0 + \ldots + p_{n+1}} f(d_n) \end{aligned}$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Cum $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{p_{n+1}}{p_0 + \ldots + p_{n+1}} = 0$, din Teorema 3.1 deducem că există $l \in I$ astfel ca $d_n \to l$. Continuitatea lui f şi egalitatea $a_{n+1} = f(d_n)$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ conduc la convergenţa şirului $(a_n)_{n\geq 1}$.

Din definiţia iteraţiei (b) avem

$$(p_0 + \ldots + p_n)\, b_{n+1} = p_0 f(b_0) + \ldots + p_n f(b_n),$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$ şi

$$(p_0 + \ldots + p_{n-1})\, b_n = p_0 f(b_0) + p_{n-1} f(b_{n-1}),$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ de unde

$$(p_0 + \ldots + p_n) b_{n+1} = (p_0 + \ldots + p_{n-1}) b_n + p_n f(b_n),$$

adică, pentru orice $n \geq 1$,

$$b_{n+1} = \left(1 - \frac{p_n}{p_0 + \ldots + p_n}\right) b_n + \frac{p_n}{p_0 + \ldots + p_n} f\left(b_n\right).$$

Cum şi pentru $n = 0$ egalitatea este adevărată, deducem că $\left(b_n\right)_{n \geq 0}$ verifică aceeaşi recurenţă ca şirul $\left(c_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ şi atunci concluzia se impune.

Corolarul 3.3. *Dacă funcţia $f : I \to I$ este continuă atunci, pentru orice $x, y, z \in I$, şirurile $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definite în Corolarul 2.3 sunt convergente şi limitele lor sunt puncte fixe ale funcţiei f.*

Demonstraţie. Şirul $\left(t_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ definit prin $t_n = \dfrac{1}{n+1}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ verifică $t_n \to 0$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}\left(t_0 + t_1 + \ldots + t_n\right) = \infty$. Apelând la Teorema 3.1 sau la Propoziţia 3.2, cu $p_n = 1$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, obţinem că $\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $\left(y_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $\left(z_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sunt convergente şi limita lui $\left(z_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ este punct fix al funcţiei f. Cu Lema *Cesàro-Stolz* deducem imediat că şi $\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}, \left(y_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ au limita punct fix al funcţiei f.

4. Aplicaţii

A.1. (Lema Cesàro-Stolz pentru monotonie). *Fie $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $\left(v_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ două şiruri de numere reale astfel ca:*

(i) $\left(v_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *este strict crescător;*

(ii) şirul $\left(\dfrac{u_{n+1} - u_n}{v_{n+1} - v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *este monoton.*

Atunci şirul $\left(\dfrac{u_{n+1} - u_0}{v_{n+1} - v_0}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *este monoton şi are aceeaşi monotonie cu* $\left(\dfrac{u_{n+1} - u_n}{v_{n+1} - v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Demonstraţie. Avem egalitatea

$$\frac{u_n - u_0}{v_n - v_0} = \frac{(v_1 - v_0)\cdot\dfrac{u_1 - u_0}{v_1 - v_0} + (v_2 - v_1)\cdot\dfrac{u_2 - u_1}{v_2 - v_1} + (v_n - v_{n-1})\cdot\dfrac{u_n - u_{n-1}}{v_n - v_{n-1}}}{v_1 - v_0 + v_2 - v_1 + \ldots + v_n - v_{n-1}}$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Luând $p_k = v_k - v_{k-1}$ pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$, avem $p_k > 0$ pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$. Din Lema 2.1, cu mici adaptări, suntem conduşi la concluzie.

A.2. (R.M.T. 2001) *Fie $\alpha > 0, a \in [0, 1]$ şi $\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ şirul definit prin*

$$x_0 = a, \quad x_{n+1} = \frac{x_0^\alpha + x_1^\alpha + \ldots + x_n^\alpha}{n+1}$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Atunci şirul $\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent.

Soluţie. Se aplică Corolarul 3.2. Dacă $a = 1$ limita şirului este 1, iar dacă $a \in [0, 1)$, limita este 0.

A.3. (N. Bourbăcuţ) *Fie* $a, b \in \mathbb{R}, a < b, f : [a, b] \to [a, b]$ *o funcţie crescătoare* $u \in [a, b]$ *şi* $(x_n)_{n\geq 1}, (y_n)_{n\geq 1}$ *şirurile definite prin*

$$x_1 = y_1 = u, \quad x_{n+1} = f\left(\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}\right), \quad y_{n+1} = \frac{n}{n+1} y_n + \frac{1}{n+1} f(y_n)$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. *Să se arate că cele două şiruri sunt convergente şi au aceeaşi limită.*

Soluţie. Ca şi în Corolarul 2.3 deducem că $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

Fie $l = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Atunci şirul $(z_n)_{n\geq 1}$ definit prin $z_n = \dfrac{x_1 + \ldots + x_n}{n}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ are limita l şi cum $z_{n+1} = \dfrac{n}{n+1} z_n + \dfrac{1}{n+1} f(z_n)$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ deducem că $z_n = y_n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ şi atunci şirul $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ are limita tot l.

A.4. (O. L. M. Bucureşti 2012) *Fie* $a \in [0, 1]$ *şi* $(x_n)_{n\geq 1}$ *şirul definit prin*

$$x_1 = a, \quad x_{n+1} = \sin\left(\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}\right), \ n \in \mathbb{N}.$$

Să se arate că $(x_n)_{n\geq 1}$ *este convergent şi să se afle limita sa.*

Soluţie. Se poate aplica A.3.

A.5. (D. Şt. Marinescu, M. Monea) *Fie* $f : [0, 1] \to [0, 1]$ *o funcţie continuă şi* $x_0 \in [0, 1]$. *Definim şirul* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *prin*

$$x_{n+1} = \int_0^{\frac{x_0 + \ldots + x_n}{n}} f(t)\,\mathrm{d}t, \ n \in \mathbb{N}.$$

Să se arate că şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este convergent.*

Soluţie. Fie $F : [0, 1] \to [0, 1]$ definită prin $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ pentru orice $x \in [0, 1]$. Atunci F este bine definită (deoarece $0 \leq f \leq 1$) şi $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ verifică

$$x_0 \in [0, 1], x_{n+1} = F\left(\frac{x_0 + \ldots + x_n}{n}\right),$$

iar atunci concluzia se impune imediat.

Bibliografie

[1] D. Borwein, J. Borwein, *Fixed point iteration for real functions*, J. Math. Anal. Appl. 157 (1991), pp. 112-126

[2] D.-Şt. Marinescu, M. Monea, *A generalisation of Hillam's Theorem*, Gazeta Matematică seria A, 1-2/2014, pp. 1-6

[3] W. R. Mann, *Mean value methods in iterations*, Proc. AMS, 4(1953), pp. 505-510

[4] V. Radu, *Lecţii de matematică elementară*, Ed. Augusta, Timişoara 2000