ECUAŢIA LUI CAUCHY ŞI MULŢIMI NUMĂRABILE

George Stoica[1)]

Abstract. We prove that the functions satisfying Cauchy's functional equation outside a countable set $N \subset \mathbb{R}$ can be obtained by redefining, in an arbitrary manner on N, the functions satisfying Cauchy's functional equation everywhere on $\mathbb{R}$.

Keywords: Cauchy's functional equation; countable sets

MSC : 39B22, 97I70

Vom arăta că funcţiile care satisfac ecuaţia funcţională a lui *Cauchy* în afara unei mulţimi numărabile $N \subset \mathbb{R}$ se obţin prin redefinirea arbitrară pe N a funcţiilor care satisfac ecuaţia funcţională a lui *Cauchy* pe întreg $\mathbb{R}$. Mai precis, avem următorul rezultat.

Teorema 1. *Notăm prin N^c complementara unei mulţimi numărabile $N \subset \mathbb{R}$ şi considerăm o funcţie $f : N^c \to \mathbb{R}$ care satisface ecuaţia*

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \text{ pentru orice } x, y, x+y \in N^c. \tag{1}$$

Atunci există o funcţie unică $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care satisface ecuaţiile

$$F(x+y) = F(x) + F(y) \text{ pentru orice } x, y \in \mathbb{R} \tag{2}$$

[1)] Profesor dr., University of New Brunswick, Saint John, Canada.

şi

$$f(x) = F(x) \text{ pentru } x \in N^c. \tag{3}$$

Să începem cu un rezultat auxiliar.

Lema 2. *În ipotezele Teoremei* 1 *următoarele afirmaţii sunt adevărate.* *Dacă* $x_1, y_1, x_2, y_2 \in N^c$ *satisfac* $x_1 + y_1 = x_2 + y_2$, *atunci*

$$f(x_1) + f(y_1) = f(x_2) + f(y_2); \tag{4}$$

Dacă $x_1, x_2, x_3 \in N^c$ *atunci există* $y_1, y_2 \in N^c$ *astfel ca*

$$x_1 + x_2 + x_3 = y_1 + y_2 \text{ şi } f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) = f(y_1) + f(y_2). \tag{5}$$

Demonstraţia Lemei 2. Pentru a arăta (4), să alegem $z \in N^c$ astfel ca

$$y_1' := y_1 - z \in N^c, y_2' := y_2 - z \in N^c,$$

$$x_1 + y_1' = x_2 + y_2' = x_1 + y_1 - z = x_2 + y_2 - z \in N^c.$$

Un astfel de z există, deoarece mulţimile $A = \{y_1 - t \mid t \in N\}$, $B = \{y_2 - t \mid t \in N\}$ şi $C = \{x_1 + y_1 - t \mid t \in N\}$ sunt numărabile, deci există $z \in \mathbb{R} \setminus (A \cup B \cup C)$.

Folosind ecuaţia (1) obţinem

$$\begin{aligned}
&f(y_1) = f(y_1') + f(z) \text{ deoarece } y_1', z, y_1 \in N^c \text{ şi } y_1 = y_1' + z\\
&f(y_2) = f(y_2') + f(z) \text{ deoarece } y_2', z, y_2 \in N^c \text{ şi } y_2 = y_2' + z\\
&f(x_1 + y_1') = f(x_1) + f(y_1') \text{ deoarece } x_1, y_1', x_1 + y_1' \in N^c\\
&f(x_2 + y_2') = f(x_2) + f(y_2') \text{ deoarece } x_2, y_2', x_2 + y_2' \in N^c.
\end{aligned}$$

Deci

$$f(x_1) + f(y_1) = f(x_1 + y_1') + f(z) = f(x_2 + y_2') + f(z) = f(x_2) + f(y_2)$$

adică relaţia (4).

Pentru a arăta relaţia (5), să alegem $z \in N^c$ (existenţa lui z fiind argumentată ca mai sus) astfel ca

$$z' := x_3 - z \in N^c, y_1 := x_1 + z \in N^c, y_2 := x_2 + z' = x_2 + x_3 - z \in N^c.$$

Folosind ecuaţia (1) obţinem

$$\begin{aligned}
&f(x_3) = f(z) + f(z') \text{ deoarece } z, z', x_3 \in N^c \text{ şi } x_3 = x + z'\\
&f(y_1) = f(x_1) + f(z) \text{ deoarece } x_1, z, y_1 \in N^c \text{ şi } y_1 = x_1 + z\\
&f(y_2) = f(x_2) + f(z') \text{ deoarece } x_2, z', y_2 \in N^c \text{ şi } y_2 = x_2 + z.
\end{aligned}$$

Prin adunarea relaţiilor de mai sus şi folosind (1), rezultă

$$\begin{aligned}
&f(y_1) + f(y_2) = f(x_1) + f(x_2) - f(x_3) + 2f(z) + 2f(z') =\\
&= f(x_1) + f(x_2) - f(x_3) + 2f(z + z') \text{ (deoarece } z, z', z + z' \in N^c) =\\
&= f(x_1 + f(x_2) + f(x_3) \text{ (deoarece } z + z' = x_3 \in N^c\text{)},
\end{aligned}$$

adică relaţia (5).

Demonstraţia Teoremei 1. Pentru a defini F, să observăm că orice număr real z este de forma $x+y$ cu $x, y \in N^c$ (într-adevăr, alegem $x \in N^c$ astfel ca $y := z - x \in N^c$). În acest caz, definim

$$F(z) = f(x) + f(y).$$

Funcţia F este bine definită datorită relaţiei (4). Din definiţia lui F şi ecuaţia (1), pentru $z \in N^c$, avem că $F(z) = f(z)$, adică relaţia (3).

Să luăm $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$ de forma $z_1 = x_1 + y_1, z_2 = x_2 + y_2$ cu $x_1, x_2, y_1, y_2 \in N^c$ şi să aplicăm relaţia (5) de două ori; obţinem două numere $z_1', z_2' \in N^c$ astfel ca

$$\begin{aligned}&x_1 + y_1 + x_2 + y_2 = z_1' + z_2' \text{ şi}\\ &f(x_1) + f(y_1) + f(x_2) + f(y_2) = f(z_1') + f(z_2').\end{aligned}$$

Dar membrul stâng în ultima ecuaţie este egal cu $F(z_1) + F(z_2)$, iar membrul drept este egal cu $F(z_1' + z_2') = F(z_1 + z_2)$, adică relaţia (2).

Pentru a arăta unicitatea lui F, să considerăm două funcţii $F_1, F_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care satisfac ecuaţia (2) şi coincid pe N^c. Atunci diferenţa $F := F_1 - F_2$ satisface ecuaţia (2) şi se anulează pe N^c; cum orice număr real z este de forma $x+y$ cu $x, y \in N^c$, obţinem că $F(z) = F(x)+F(y) = 0$, deci unicitatea este arătată şi demonstraţia este incheiată.

Observaţii. (i) Concluzia Teoremei 1 rămâne adevărată in următorul context. Fie $N_1, N_2 \subset \mathbb{R}$ mulţimi numărabile şi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie care satisface relaţia

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \text{ pentru orice } x \in N_1^c, y \in N_2^c. \tag{6}$$

Atunci restricţia lui f la N^c, unde $N := N_1 \bigcup N_2$, satisface ipotezele Teoremei 1. Într-adevăr, să alegem $z \in N^c$ astfel încât $y + z \in N^c$. Atunci, folosind ecuaţia (6), obţinem

$$\begin{aligned}&f(x+y+z) = f(x+y) + f(z) \text{ deoarece } x+y, z \in N^c\\ &f(x+y+z) = f(x) + f(y+z) \text{ deoarece } x, y+z \in N^c\\ &f(y+z) = f(y) + f(z) \text{ deoarece } y, z \in N^c.\end{aligned}$$

Comparând cele trei relaţii de mai sus, obţinem relaţia (1).

(ii) Teorema 1 rămâne adevărată înlocuind mulţimea numărabilă N cu mulţimi de prima categorie *Baire* sau de măsură *Lebesgue* nulă; în acest caz, mulţimile din ipoteză şi cele din concluzie nu mai sunt aceleaşi (deşi sunt de prima categorie sau de măsură *Lebesgue* nulă), iar demonstraţiile rezultatelor corespunzătoare nu mai sunt elementare (cititorul poate consulta [1], [2], [3]).

BIBLIOGRAFIE

[1] N.G. de Bruijn, *On almost additive functions.* Colloq. Math. 15 (1966), 59–63.
[2] S. Hartman, *A remark about Cauchy's equation.* Colloq. Math. 8 (1961), 77–79.
[3] W.B. Jurkat, *On Cauchy's functional equation.* Proc. Amer. Math. Soc. 16 (1965), 683-686.