

PROBLEME PENTRU EXAMENE NAȚIONALE¹⁾

Clasa a IX-a

- 13.** Să se arate că numărul $\sqrt{2} - \frac{3}{\sqrt{5}}$ este irațional.
- 14.** Să se arate că $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{10}} < 2$.
- 15.** Să se arate că $2a^3 + b^3 \geq 3a^2b$, oricare ar fi $a, b \geq 0$.
- 16.** Să se arate că $(a + b + c)^3 - a^3 - b^3 - c^3 = 3(a + b)(b + c)(c + a)$.
- 17.** Să se afle partea întreagă a numărului $\sum_{k=1}^{100} \frac{1}{k^2 + k}$.
- 18.** Să se arate că $[x] + \left[x + \frac{1}{2} \right] = [2x]$, oricare ar fi x real.

Clasa a X-a

- 19.** Să se ordoneze crescător numerele $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{112}$ și $\sqrt[4]{700}$.
- 20.** Să se arate că $\log_2 3 \notin \mathbb{Q}$.
- 21.** Să se calculeze $\prod_{k=2}^{15} \log_k(k + 1)$.
- 22.** Să se calculeze $(1 - 2z_1^2)(1 - 2z_2^2)(1 - 2z_3^2)$, unde z_1, z_2, z_3 sunt rădăcinile cubice complexe ale unității.
- 23.** Să se rezolve în mulțimea numerelor complexe ecuația $z^2 = 4 + 3i$.
- 24.** Să se rezolve în mulțimea numerelor complexe ecuația $z^4 = 24 + 7i$.

Clasa a XI-a

- 25.** Fie S_n mulțimea permutărilor mulțimii $\{1, 2, \dots, n\}$.
- a) Fie $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. Să se calculeze σ^4 .
- b) Să se arate că pentru orice $\sigma \in S_n$ există $p \in \mathbb{N}^*$ cu $\sigma^p = e$.
- c) Să se determine $\sigma \in S_4$ cu $\sigma^4 = \sigma$.
- 26.** Considerăm șirul cu termenul general $a_n = \frac{3n + 2}{2n + 5}$, $n \geq 1$.
- a) Să se arate că șirul este monoton.
- b) Să se arate că șirul este mărginit.
- c) Să se determine $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(a_n - \frac{3}{2} \right)$.

¹⁾ La problemele din această rubrică nu se primesc soluții. (N.R.)

Clasa a XII-a

- 27.** a) Să se calculeze $\int (x^2 + x + 1)^2 dx$.
- b) Să se calculeze $\int \sin^3 x dx$.
- c) Să se calculeze $\int \frac{1}{x^3 + x} dx$, $x \in (0, \infty)$.
- 28.** Fie mulțimea $G = \{\cos q\pi + i \sin q\pi \mid q \in \mathbb{Q}\}$.
- a) Verificați dacă G este parte stabilă a lui \mathbb{C} față de înmulțire.
- b) Să se arate că (G, \cdot) este grup.
- c) Verificați dacă $\frac{3 + 4i}{5} \in G$.