

## PROBLEME PROPUSE

### PROBLEME PENTRU EXAMENE NAȚIONALE<sup>1)</sup>

#### Clasa a VII-a

1. Se dau numerele  $a = -0,5$  și  $b = -\frac{2}{3}$ . Care dintre cele două numere este mai mare?
2. Scrieți un divizor propriu al numărului 289.
3. Dacă  $\frac{a}{5} = \frac{4}{b}$ , calculați  $3ab - 20$ .
4. Unghiul format de bisectoare cu o latură a unghiului are măsura de  $40^\circ$ . Care este măsura unghiului?
5. În triunghiul  $ABC$  mediana  $AM$ ,  $M \in BC$ , este jumătate din  $BC$ . Ce măsură are unghiul  $BAC$ ?
6. În triunghiul dreptunghic  $ABC$  ( $m(\sphericalangle A) = 90^\circ$ ),  $AM$  ( $M \in BC$ ) este mediană. Dacă  $AM = AC$ , aflați măsura unghiului  $ABC$ .

#### Clasa a VIII-a

7. Calculați media aritmetică a numerelor 4; 3; 5,2 și 3,1.
8. Care este cel mai mare număr întreg, mai mic decât  $-\sqrt{290}$ ?
9. Se dă mulțimea  $A = \left\{ 0, 3, -(1, 2)^0, \frac{6}{3}, \sqrt{49}, \sqrt{94} \right\}$ . Calculați suma elementelor mulțimii  $A \cap \mathbb{Z}$ .
10. Lungimea înălțimii unui triunghi echilateral este egală cu  $4\sqrt{3}$  cm. Aflați aria triunghiului.
11. Aflați aria unui disc cu diametrul de 12 cm.
12. În paralelogramul  $ABCD$  avem  $AC = BD$ . Aflați măsura unghiului  $DAB$ .

#### Clasa a IX-a

13. Numerele reale  $a$  și  $b$  verifică  $a + b = 1$ . Să se arate că  $a^4 + b^4 \geq 1/8$ .
14. Să se arate că  $|a - b| + |b - c| + |c - a| = 2(\max(a, b, c) - \min(a, b, c))$ , oricare ar fi  $a, b, c \in \mathbb{R}$ .
15. Să se arate că numărul  $\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$  este irațional.
16. Numerele reale  $x, y, z$  verifică  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{x + y + z}$ . Să se calculeze  $(x + y)(y + z)(z + x)$ .

<sup>1)</sup> La problemele din această rubrică nu se primesc soluții.

17. Funcția de gradul unu  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  verifică  $f(3) - f(2) = 5$ . Să se calculeze  $f(4) - f(1)$ .

18. Să se arate că  $\frac{a}{(a-b)(a-c)} + \frac{b}{(b-a)(b-c)} + \frac{c}{(c-a)(c-b)} = 0$ .

**Clasa a X-a**

19. O progresie aritmetică de numere reale are rația 1 și suma primilor trei termeni egală cu 10. Să se determine primul termen al progresiei.

20. Să se arate că 7 divide  $2^{2^{n+1}} + 7$ , oricare ar fi  $n \in \mathbb{N}$ .

21. Comparați  $2^{1+\sqrt{6}}$  cu  $2^{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ .

22. Să se ordoneze descrescător numerele  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt[3]{3}$  și  $\sqrt[4]{5}$ .

23. Dacă  $\sin a \cos b = -1/2$ , ce valori poate lua  $\cos a \sin b$ ?

24. Să se descrie poziția punctelor  $A, B, C$  în plan știind că

$$|\vec{AB}| + |\vec{BC}| = |\vec{AC}|.$$

**Clasa a XI-a**

25. Fie  $(a_n)_{n \geq 1}$  un șir de numere reale cu proprietatea că

$$1 + a_{n-1} \leq 2a_n \leq 1 + a_n, n \geq 1.$$

a) Să se arate că șirul este monoton

b) Să se arate că  $a_n \leq 1, n \geq 1$ .

c) Să se calculeze limita șirului  $(a_n)_{n \geq 1}$ .

26. Fie permutarea  $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 3 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ .

a) Să se calculeze numărul de inversiuni ale permutării  $\sigma^2$ .

b) Să se determine o permutare ce comută cu  $\sigma$ .

c) Să se arate că nu există  $\tau \in S_6$  cu proprietatea că  $\tau^4 = \sigma$ .

**Clasa a XII-a**

27. Considerăm funcția  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{\ln^2 x}{x^2}$ .

a) Să se arate că funcția  $F : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, F(x) = -\frac{\ln^2 x}{x} - \frac{2 \ln x}{x} - \frac{2}{x}$  este o primitivă a funcției  $f$ .

b) Fie  $G$  o primitivă a lui  $f$  cu  $G(1) = 0$ . Să se calculeze  $G(e)$ .

c) Fie  $H$  o primitivă a lui  $f$  cu  $\lim_{x \rightarrow \infty} H(x) = 1$ . Să se calculeze  $H(1)$ .

28. Se consideră pe  $\mathbb{R}$  legea de compoziție  $x \circ y = xy - 2x - 2y + 6$ . Fie  $M = (-\infty, 1] \cup [3, \infty)$ .

a) Să se arate că  $M$  este parte stabilă a lui  $\mathbb{R}$  față de legea  $\circ$ .

b) Să se arate că  $(M, \circ)$  este monoid comutativ.

c) Să se determine elementele inversabile ale monoidului  $(M, \circ)$ .