ARTICOLE ŞI NOTE MATEMATICE

ASUPRA PROBLEMEI 26781

Marcel Ţena[1)]

Profesorului Toma Albu, la a 70-a aniversare

Abstract. In this work the author gives nine solutions, by various methods, for the Problem 26781 of G.M.-B, as well a generalization.

Keywords: rational number, equation, polynomial, root, irreducible polynomial, field, *Galois* extension.

MSC : 97H20, 97H40.

Problema 26781 din G.M.-B nr. 6-7-8/2013, semnată de *Mădălina Albu*, Babadag, are următorul enunţ:

Fie $x \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că numerele $x^3 + x$ şi $x^5 + x$ sunt raţionale. Să se arate că x este un număr raţional.

Problema este, după opinia semnatarului acestor rânduri, deosebit de frumoasă şi poate fi abordată atât cu metode elementare, cât şi dintr-o perspectivă mai înaltă.

În această notă matematică vom da nouă soluţii acestei probleme, precum şi o generalizare. Primele patru soluţii, respectiv ultimele cinci soluţii au puncte comune, totuşi finalizările lor sunt distincte. Pentru noţiunile de polinom minimal, bază a unui spaţiu vectorial, extindere *Galois*, grup *Galois*, element separabil, corp algebric închis, cititorul poate consulta lucrarea [1].

Notaţii. Pe parcursul tuturor soluţiilor vom considera numerele raţionale

$$a = x^3 + x; \tag{1}$$

$$b = x^5 + x, \tag{2}$$

precum şi polinoamele cu coeficienţi raţionali

$$f = X^3 + X - a; \tag{3}$$

$$g = X^5 + X - b. \tag{4}$$

Soluţia 1. Înmulţind (1) cu $-x^2$ şi adunând cu (2) obţinem succesiv:

$$-x^5 - x^3 + x^5 + x = -ax^2 + b \Leftrightarrow -x^3 + ax^2 + x - b = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x - a + ax^2 + x - b = 0 \Leftrightarrow ax^2 + 2x - (a+b) = 0. \tag{5}$$

Înmulţind (5) cu x avem:

$$ax^3 + 2x^2 - (a+b)x = 0 \Leftrightarrow a(a-x) + 2x^2 - (a+b)x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - (2a+b)x + a^2 = 0. \tag{6}$$

Înmulţim (5) cu 2 şi (6) cu $-a$ şi adunăm, pentru a reduce termenii cu x^2. Obţinem:

[1)]Profesor dr., Colegiul Naţional „Sf. Sava“, Bucureşti

$$2ax^2+4x-2(a+b)-2ax^2+a(2a+b)x-a^3=0 \Leftrightarrow x=\frac{a^3+2a+2b}{2a^2+ab+4}\in\mathbb{Q}.$$

Să remarcăm că $2a^2+ab+4>0$, întrucât $ab=x^2\left(x^2+1\right)\left(x^4+1\right)\geq 0$.

Soluţia 2. Vom folosi următoarea:

Lemă. *Dacă ecuaţiile de gradul doi cu coeficienţi raţionali nenuli*

$$a_1x^2+b_1x+c_1=0, \qquad a_2x^2+b_2x+c_2=0,$$

au o rădăcină comună iraţională, atunci:

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}.$$

Demonstraţia lemei. Fie $x_0\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ rădăcina comună, deci

$$a_1x_0^2+b_1x_0+c_1=0, \tag{7}$$

$$a_2x_0^2+b_2x_0+c_2=0. \tag{8}$$

Înmulţim (7) cu $-a_2$ şi (8) cu a_1 şi adunăm, pentru a reduce termenii cu x_0^2. Obţinem:

$$-a_1a_2x_0^2-a_2b_1x_0-a_2c_1+a_1a_2x_0^2+a_1b_2x_0+a_1c_2=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(a_1b_2-a_2b_1\right)x_0=a_2c_1-a_1c_2.$$

Deoarece $x_0\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, rezultă $a_1b_2-a_2b_1=0$, $a_2c_1-a_1c_2=0$, adică

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}.$$

Trecem acum la soluţia problemei, pe baza lemei precedente.

Presupunem prin absurd că $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Ecuaţiile (5) şi (6) au coeficienţi raţionali nenuli şi admit rădăcina comună iraţională x. Conform lemei, coeficienţii acestor ecuaţii sunt proporţionali, adică:

$$\frac{a}{2}=\frac{2}{-(2a+b)}=\frac{-(a+b)}{a^2}. \tag{9}$$

Deoarece $ab>0$, rezultă că a şi b au acelaşi semn. Atunci, (9) este o contradicţie, deoarece prima fracţie are semn contrar faţă de celelalte două fracţii.

Soluţia 3. Gândind egalitatea (5) ca o ecuaţie în x, rezultă:

$$x=\frac{-1+\sqrt{d}}{a}, \tag{10}$$

unde $d=a^2+ab+1>0$, $d\in\mathbb{Q}$. În (10) avem semnul + în faţa radicalului, întrucât $ax+1=x^2\left(x^2+1\right)+1>0$.

Ridicând egalitatea (10) la cub, obţinem:

$$x^3=-\frac{1+3d}{a^3}+\frac{d+3}{a^3}\sqrt{d}. \tag{11}$$

Adunând egalităţile (10) şi (11), obţinem:

$$a = -\left(\frac{1}{a} + \frac{1+3d}{a^3}\right) + \left(\frac{1}{a} + \frac{d+3}{a^3}\right)\sqrt{d}. \tag{12}$$

Coeficientul lui $\sqrt{d}$ din (12) este nenul, deoarece numărătorul acestuia este $a^2 + d + 3 > 0$. Atunci, din (12) rezultă $\sqrt{d} \in \mathbb{Q}$ şi, revenind în (10), obţinem $x \in \mathbb{Q}$.

Soluţia 4. Presupunem prin absurd că $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, deci din (10) avem $\sqrt{d} \notin \mathbb{Q}$. Considerăm corpul pătratic $\mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right) = \left\{\alpha + \beta\sqrt{d} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{Q}\right\}$, corp care conţine numerele x, x^3, x^5. Dacă notăm cu y^* conjugatul pătratic al unui element arbitrar $y \in \mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)$ şi ţinem seama că aplicaţia $y \mapsto y^*$ este un automorfism al corpului $\mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)$ care invariază doar numerele raţionale, putem scrie:

$$a \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow a^* = a \Leftrightarrow (x^*)^3 + x^* = x^3 + x \Leftrightarrow x^* = x,$$

căci funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t) = t^3 + t$ este strict crescătoare. Dar, din presupunerea $x \notin \mathbb{Q}$, avem $x^* \neq x$, contradicţie.

Soluţia 5. Fie $x_1 = x$ şi $D = (f, g) \in \mathbb{Q}[X]$, gândit ca polinom monic. Vom arăta că $D = X - x_1$, de unde va rezulta că $x_1 \in \mathbb{Q}$. Trecem la detalii. Deoarece $f(x_1) = 0$, $g(x_1) = 0$, din teorema lui *Bézout* avem:

$$f = (X - x_1) f_1, \qquad g = (X - x_1) g_1,$$

unde $f_1, g_1 \in \mathbb{R}[X]$.

Polinomul f_1 nu are rădăcini reale, căci notând cu x_2, x_3 rădăcinile acestuia, avem $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -2 < 0$. Deoarece f_1 are gradul 2, rezultă că f_1 este ireductibil în inelul de polinoame $\mathbb{R}[X]$. Fie $D_1 = (f_1, g_1) \in \mathbb{R}[X]$, gândit ca polinom monic. Arătăm că $D_1 = 1$. Deoarece D_1 divide f_1 şi f_1 este ireductibil în $\mathbb{R}[X]$, rezultă $D_1 = 1$ sau $D_1 = f_1$. Deoarece D_1 divide f_1 şi g_1, rezultă că D_1 divide restul împărţirii lui g_1 prin f_1, rest care are gradul mai mic ca 2, prin urmare $D_1 = 1$. Atunci

$$D = (f, g) = (X - x_1) D_1 = X - x_1 \in \mathbb{Q}[X],$$

de unde $x_1 = x \in \mathbb{Q}$.

Soluţia 6. Presupunem prin absurd că $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Polinomul $f = X^3 + X - a$, cu rădăcinile $x_1 = x$, x_2, x_3 nu are rădăcini în $\mathbb{Q}$, întrucât $x_1 \notin \mathbb{Q}$, iar $x_2, x_3 \notin \mathbb{R}$. Deoarece f are gradul 3, rezultă că f este ireductibil în inelul $\mathbb{Q}[X]$, prin urmare f este polinomul minimal al lui x_1 peste $\mathbb{Q}$. Dar x_1 verifică şi polinomul $g \in \mathbb{Q}[X]$, prin urmare f divide g în inelul $\mathbb{Q}[X]$. Însă restul împărţirii lui g prin f este polinomul nenul:

$$r = aX^2 + 2X - (a + b) \in \mathbb{Q}[X],$$

contradicţie.

Soluţia 7. Presupunem prin absurd că $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Atunci $f = X^3 + X - a$ este polinomul minimal al lui x peste $\mathbb{Q}$. Dar x verifică, aşa cum am văzut, polinomul nenul $r = aX^2 + 2X - (a + b) \in \mathbb{Q}[X]$, cu $\operatorname{grad} r < \operatorname{grad} f$, contradicţie.

Soluţia 8. Presupunem prin absurd că $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ şi notăm cu $\mathbb{Q}(x)$ cel mai mic subcorp al lui $\mathbb{R}$ care conţine pe $\mathbb{Q}$[1)] şi pe x. Întrucât $f = X^3 + X - a$ este polinomul minimal al lui x peste $\mathbb{Q}$, rezultă că $\left\{1, x, x^2\right\}$ este o bază de spaţiu vectorial a lui $\mathbb{Q}(x)$ peste $\mathbb{Q}$. Dar egalitatea $ax^2 + 2x - (a+b) = 0$ arată că 1, x, x^2 sunt liniar dependente peste $\mathbb{Q}$, contradicţie.

Soluţia 9. Folosim teoria lui *Galois*. Fie $E = \mathbb{Q}(x_1, x_2, x_3)$ corpul de descompunere al polinomului $f = X^3 + X - a \in \mathbb{Q}[X]$, adică subcorpul cel mai mic al lui $\mathbb{C}$ care conţine rădăcinile sale $x_1 = x \in \mathbb{R}$, $x_2, x_3 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Extinderea de corpuri $\mathbb{Q} \subseteq E$ este separabilă (fiind de caracteristică zero) şi normală (E este corpul de descompunere al unui polinom), prin urmare este o extindere *Galois*. Fie G grupul *Galois* al extinderii, adică grupul automorfismelor corpului E. Pentru orice automorfism $\sigma \in G$, elementul $\sigma(x) \in E$ rămâne rădăcină a oricărui polinom cu coeficienţi raţionali pe care îl verifică x. Deoarece x verifică polinomul f, vom avea $\sigma(x) \in \{x_1, x_2, x_3\}$. Deoarece x verifică f şi g, rezultă că x este rădăcină şi pentru restul $r = aX^2 + 2X - (a+b) \in \mathbb{Q}[X]$ al împărţirii lui g prin f şi atunci $\sigma(x)$ este rădăcină pentru r, deci rădăcină reală a lui f, adică $\sigma(x) = x_1 = x$. Deoarece $\sigma(x) = x$, $\forall \sigma \in G$, rezultă că x aparţine corpului format din invarianţii grupului G. Acest corp este tocmai $\mathbb{Q}$, întrucât extinderea $\mathbb{Q} \subseteq E$ este *Galois*. Aşadar, $x \in \mathbb{Q}$ şi soluţia se încheie.

Dăm acum o generalizare, prin următoarea:

Teoremă. *Fie $K \subseteq L \subseteq \Omega$ corpuri comutative, Ω fiind un corp algebric închis. Presupunem că $x \in L$ este un element separabil, pentru care există polinoamele nenule $f, g \in K[X]$ astfel încât*:

1° $f(x) = g(x) = 0$;

2° *Singura rădăcină comună a polinoamelor f şi g (în corpul Ω) este x.*

În aceste condiţii, x este un element din corpul K.

Demonstraţie. Fie $p \in K[X]$ polinomul minimal al lui x peste K. Deoarece $f(x) = 0$ şi $g(x) = 0$, rezultă că p divide f şi g în inelul $K[X]$. Atunci, rădăcinile lui p (în corpul Ω)vor fi rădăcini comune ale lui f şi g, prin urmare p are o singură rădăcină şi anume x. Deoarece x este element separabil, polinomul său minimal p are numai rădăcini simple, adică p are gradul 1. Aşadar $p = X - x \in K[X]$, de unde $x \in K$ şi demonstraţia se încheie.

Observaţii. 1) Luând $K = \mathbb{Q}$, $L = \mathbb{R}$, $\Omega = \mathbb{C}$, $f = X^3 + X - \left(x^3 + x\right)$, $g = X^5 + X - \left(x^5 + x\right)$ şi ţinând seama că în corpuri de caracteristică zero orice element algebric este separabil, aplicând teorema precedentă regăsim problema 26781.

2) Teorema se verifică în mod trivial în cazul $L = K$ sau în cazul când unul din polinoamele f sau g are gradul 1.

[1)] Orice subcorp al lui $\mathbb{R}$ include corpul $\mathbb{Q}$.

3) În teorema de mai sus, corpul L nu are un rol esenţial, adică putem lua în ipoteză doar extinderea de corpuri $K \subseteq \Omega$ şi $x \in \Omega$.

Încheiem cu o „variaţiune“ pe tema iniţială, dată de următoarea:

Propoziţie. *Fie $p > 0$ un număr prim şi $x_0 \in \mathbb{R}$ astfel încât numărul $x_0^p - x_0$ este un întreg nedivizibil prin p. Atunci $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.*

Demonstraţie. Numărul real x_0 verifică polinomul $f = X^p - X - \alpha \in \in \mathbb{Z}[X]$, unde $\alpha = x_0^p - x_0 \in \mathbb{Z}$, $\alpha \not\equiv 0 \pmod{p}$. Dacă, prin absurd, am avea $x_0 \in \mathbb{Q}$, din faptul că f este un polinom monic cu coeficienţi întregi, ar rezulta $x_0 \in \mathbb{Z}$ şi atunci $\alpha = x_0^p - x_0 \equiv 0 \pmod{p}$ (teorema lui *Fermat*), contradicţie. Se poate justifica şi altfel: când $\alpha \not\equiv 0 \pmod{p}$, polinomul $f = X^p - X - \alpha$ (numit polinomul *Artin-Schreier*) este ireductibil în inelul $\mathbb{Q}[X]$ şi, având gradul $p > 1$, nu are rădăcini în corpul $\mathbb{Q}$. Este simplu de observat şi că pentru p prim fixat, $p \geq 3$, pentru orice $\alpha \in \mathbb{Z}$, $\alpha \neq 0$, polinomul $f = X^p - X - \alpha$ are o singură rădăcină reală (se poate utiliza şirul lui *Rolle*).

Bibliografie

[1] T. Albu, I. D. Ion, *Itinerar elementar în algebra superioară*, Editura Matrix Rom, Bucureşti, 2012.