PROBLEME PENTRU EXAMENE NAŢIONALE[1)]

Clasa a VII-a

1. Comparaţi numerele $-\dfrac{2012}{2013}$ şi $-\dfrac{2013}{2014}$.

2. Care este probabilitatea ca dintr-un pachet cu 52 de cărţi de joc să extragem un as?

3. Scrieţi numărul 1,23(45) ca fracţie ordinară ireductibilă.

4. Aflaţi lungimile înălţimilor unui triughi isoscel cu lungimile laturilor 12 cm, 10 cm, respectiv 10 cm.

5. Aflaţi aria unui paralelogram $ABCD$ în care $AB = 8$ cm, $AC = 17$ cm şi $AD = 15$ cm.

6. Aflaţi lungimea laturii unui triunghi echilateral ştiind că perimetrul unui pătrat echivalent cu el este egal cu 24 cm.

Clasa a VIII-a

7. Scrieţi sub formă de interval mulţimea $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |2x - 1| \leq 3\}$.

8. Pentru $x \in (1, 5)$ calculaţi $|x - 5| - | - 2x| + |1 - x|$.

9. Dacă numărul b reprezintă 60% din numărul a, aflaţi cât la sută din $a + b$ reprezintă numărul a.

10. Descompuneţi în factori $x^4 + y^4$.

11. Fie $x = \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5}$. Calculaţi $\max(2x + 3, 3x + 2)$.

12. Aria totală şi volumul unui cub se reprezintă prin acelaşi număr real. Aflaţi lungimea diagonalei cubului.

Clasa a IX-a

13. Să se determine numărul natural $n \geq 2$ astfel încât:

$$2^3 + 2^2 + 2 + \ldots + 2^{3-n} = \frac{127}{8}.$$

14. Să se determine numerele a, b, c, d în progresie geometrică ştiind că $a + d = 18$ şi $b + c = 12$.

15. Să se determine numerele reale a şi b ştiind că funcţiile:

$$f, g : \{-1, 0, 1\} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^7 - x^3 \text{ şi } g(x) = x^3 - ax + b,$$

sunt egale.

[1)] La problemele din această rubrică nu se primesc soluţii. (N.R.)

16. Fie $ABCDEF$ un hexagon regulat de latură 2. Calculaţi modulul vectorului $\overline{AC} + \overline{AE}$.

17. Fie A, B, C trei puncte coliniare astfel încât $B \in (AC)$ şi $AB = 5BC$. Aflaţi numerele reale x şi y astfel încât $\overline{OA} = x\overline{OB} + y\overline{OC}$, oricare ar fi O un punct din plan.

18. Pe latura AD a paralelogramului $ABCD$ se consideră punctul K astfel încât $\overline{AK} = \frac{1}{5}\overline{AD}$, iar pe diagonala AC se consideră punctul L astfel încât $\overline{AL} = \frac{1}{6}\overline{AC}$.

Arătaţi că punctele K, L şi B sunt coliniare.

Clasa a X-a

19. Să se arate că funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^5 - 3x^3 + 7$ nu este injectivă.

20. Să se arate că funcţia $f : (0, \infty) \to (-3, 7)$, $f(x) = \dfrac{7x - 3}{x + 1}$ este bijectivă.

21. Să se determine inversa funcţiei bijective $f : \mathbb{R} \to (5, \infty)$, $f(x) = 3\mathrm{e}^x + 5$.

22. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia:

$$\sqrt[3]{3x + 5} + \sqrt{x + 3} = 4.$$

23. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia:

$$4^x + 2^{x+1} \cdot 3^x - 3 \cdot 9^x = 0.$$

24. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia:

$$3 \sin x + 4 \cos x = 5.$$

Clasa a XI-a

25. Fie matricea:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

a) Să se calculeze $\det(A + 3I_3)$.
b) Să se verifice dacă $A^5 + 4A = O_3$.
c) Să se calculeze $A + A^5 + A^9 + \ldots + A^{2013}$.

26. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{2^x - 2^\pi}{x^2 - \pi^2}$; b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x+7} - 2}{\sqrt{x+3} - 2}$; c) $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right)$.

Clasa a XII-a

27. Fie M mulţimea matricelor $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ cu proprietatea $A \cdot A^t = I_2$.
a) Să se arate că M formează grup cu operaţia de înmulţire a matricelor.
b) Să se arate că $H = \{A \in M \mid \det A = 1\}$ este subgrup al lui $(M, \cdot)$.
c) Să se determine elementele de ordin 2 ale grupului M.

28. Considerăm funcţia $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

a) Să se verifice dacă $F : [1, \infty) \to \mathbb{R}$, $F(x) = 2\sqrt{x}(\ln x - 2)$ este o primitivă a funcţiei f.

b) Să se calculeze $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \sqrt{x} f(x)\mathrm{d}x$.

c) Să se calculeze $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \int_x^{x+1} f(t)\mathrm{d}t$.