CONCURSUL DE MATEMATICĂ „GH. MIHOC“
Ediţia a XVIII-a, Slobozia, 23-25 martie 2012

prezentare de COSTICĂ DUMITRU [1)]

În ultima decadă a lunii martie s-a desfăşurat la Colegiul Naţional „Mihai Viteazul“ din Slobozia a XVIII-a ediţie a concursului interjudeţean de matematică „Gheorghe Mihoc“ destinat elevilor din clasele VII-XII.

Concursul este iniţiat şi organizat de Societatea de Ştiinţe Matematice din România, filiala Ialomiţa în colaborare cu Colegiul Naţional „M. Viteazul“ Slobozia şi în parteneriat cu Primăria Municipiului Slobozia şi Consiliul Judeţean Ialomiţa.

Conform tradiţiei, participarea, cazarea şi masa concurenţilor este gratuită, precum şi acordarea unor premii substanţiale din partea organizatorilor.

Pentru asigurarea condiţiilor deosebite amintite mai înainte, trebuie aduse mulţumiri în mod deosebit primarului municipiului Slobozia, ing. *Gabi Ionaşcu*, preşedintelui Consiliului Judeţean Ialomiţa, prof. *Silvian Ciupercă*, directorului C.N. „Mihai Viteazul“, prof. *Paul Frâncu*, precum şi numeroşilor sponsori; amintim printre alţii pe ing. *Ion Drăgoi*, ing. *Cornel Vasile*, EUROINVEST SRL, PET STAR HOLDING SRL, CONTE IMPEX SRL, TRANSMIM SRL, ADMET SRL, TELETEXT SRL.

Calitatea şi prestanţa concursului au fost asigurate de un juriu format din prof. univ. dr. *Ioan Chiţescu* – preşedinte, conf. univ. dr. *Inocenţiu Drăghicescu*, prof. *Mircea Trifu* – secretar general al S.S.M.R., prof. dr. *Marcel Ţena* – redactor şef Gazeta Matematică, prof. *Costică Dumitru* – preşedinte S.S.M. Ialomiţa, prof. *Nicolae Papacu*, prof. *Marcel Popescu*.

Felicităm toţi concurenţii şi în special premianţii.

De reţinut şi iniţiativa unui fost participant la concursul „Gh. Mihoc“, *Florin Cioacă*, care de patru ani a instituit premiul „Florin Cioacă“ pentru originalitate în rezolvarea unui subiect.

Prezentăm în continuare subiectele şi lista premianţilor concursului.

Clasa a VII-a

1. a) Fie numerele naturale nenule a, b cu $a < b$. Arătaţi că $b - a \geq (a, b)$, unde (a, b) reprezintă c.m.m.d.c. pentru numerele a şi b.

b) Demonstraţi că oricare ar fi numerele naturale nenule $a_1, a_2, \ldots, a_{2011}$ cu proprietatea $a_1 < a_2 < \ldots < a_{2011}$, are loc inegalitatea:

$$\frac{1}{[a_1, a_2]} + \frac{1}{[a_2, a_3]} + \ldots + \frac{1}{[a_{2010}, a_{2011}]} \leq \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{2011}}$$

unde $[c, d]$ reprezintă c.m.m.m.c. al numerelor c şi d.

Alexandru Lăutaru, Petroşani, G.M. 12/2011

2. Să se determine lungimile laturilor unui triunghi isoscel, ştiind că lungimile laturilor sale sunt numere naturale şi că lungimea unei înălţimi este egală cu $\sqrt{2012}$.

Nicolae Papacu, Slobozia

[1)] Profesor, preşedinte filiala Ialomiţa a S.S.M.R.

3. Triunghiul ABC este dreptunghic în B, iar M este mijlocul înălţimii BD, $D \in (AC)$. Perpendiculara din D pe AM intersectează pe BC în E. Demonstraţi că triunghiul AEC este isoscel.

Romanţa Ghiţă şi *Ioan Ghiţă*, Blaj

Clasa a VIII-a

1. Determinaţi numerele naturale nenule n pentru care $\dfrac{n+2010}{[\sqrt{n+1}]}$ şi $\dfrac{n+2011}{[\sqrt{n}]}$ sunt numere naturale. Aici $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a.

Lucian Dragomir, Oţelu-Roşu, G.M. 12/2011

2. Un paralelipiped dreptunghic are dimensiunile $x-3$, $7-x$, $x-2$. Determinaţi x astfel încât diagonala paralelipipedului să aibă lungime minimă.

Ioan Voicu, Răduleşti, Ialomiţa

3. Să se determine toate intervalele $I = [a, b]$, $a < b$, care au proprietatea: pentru orice $x \in \left[a, \dfrac{a+b}{2}\right]$, $y \in \left[\dfrac{a+b}{2}, b\right]$, rezultă $x + y \in I$ şi $x \cdot y \in I$.

Nicolae Papacu, Slobozia

Clasa a IX-a

1. Rezolvaţi în mulţimea numerelor naturale ecuaţia:

$$[\sqrt{n}\,] + \left[\frac{n-2}{3}\right] + 1 = n.$$

Aici $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a.

Romanţa Ghiţă şi *Ioan Ghiţă*, Blaj, G.M. 11/2011.

2. Într-un triunghi având lungimile laturilor în progresie aritmetică se consideră centrul I al cercului înscris şi centrul O al cercului circumscris. Să se arate că:

a) Una din paralelele duse la laturile triunghiului prin centrul său de greutate conţine punctul I.

b) Una din bisectoarele triunghiului este perpendiculară pe OI.

I.C. Drăghicescu, Bucureşti

3. Fie ABC un triunghi şi $P \in (AB)$, $Q \in (AC)$, astfel încât $\dfrac{PB}{PA} = \dfrac{AC}{BC}$, $\dfrac{QC}{QA} = \dfrac{AB}{BC}$. Ştiind că centrul cercului înscris în triunghiul ABC aparţine lui PQ, să se arate că ABC este triunghi dreptunghic.

Vasile Berghea, Avrig, G.M. 11/2011

Clasa a X-a

1. Considerăm numerele complexe distincte z_1, z_2, z_3 de modul 1 astfel încât $\dfrac{z_1 z_2}{(z_1 - z_2)^2} + \dfrac{z_2 z_3}{(z_2 - z_3)^2} + \dfrac{z_3 z_1}{(z_3 - z_1)^2} = -1$. Să se demonstreze că z_1, z_2, z_3 sunt afixele vârfurilor unui triunghi echilateral.

Florin Stănescu, Găieşti, G.M. 12/2011

2. Fie $z \in \mathbb{C}$. Să se arate că următoarele afirmaţii sunt echivalente:

a) $z = \mathrm{i}$;

b) z satisface, simultan, inegalităţile: $|z + 1 - \mathrm{i}| \leq 1$; $\left|z^2 + 1 - \mathrm{i}\right| \leq 1$.

Octav Drăgoi, Bucureşti

3. Un patrulater este circumscris unui cerc. Dacă se cunosc lungimile a trei dintre laturile sale, se cere să se afle maximul ariei patrulaterului şi să se precizeze când se realizează acesta.

I.C. Drăghicescu, Bucureşti

Clasa a XI-a

1. Fie $A, B \in M_2(\mathbb{C})$, astfel încât $AB = O_2$. Să se demonstreze că

$$\det\left((A+B)^n\right) = \det\left(A^n + B^n\right)$$

pentru orice $n \geq 1$ număr natural.

Nicolae Bourbăcuţ, Sarmizegetusa Regia, G.M. 1/2012

2. Fie numerele $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$. Să se demonstreze inegalitatea:

$$\frac{a+3b}{(a+b)(3a+b)} + \frac{a+3c}{(a+c)(3a+c)} \leq \frac{1}{a}.$$

Benedict Niculescu, Bucureşti

3. Fie $a > 1$. Se consideră o funcţie continuă $F : (0, \infty) \to (0, \infty)$, astfel încât $F(1) = 1$ şi $F(a) = a$.

Să se arate că există $c \in (1, a)$ astfel încât $F(c) \cdot (1 + \ln F(c)) = a$.

Cătălin Cristea, Craiova, G.M. 4/2011

Clasa a XII-a

1. Fie n un număr natural, $n \geq 2$ şi $(G, \cdot)$ un grup cu $n^2 - n$ elemente. Ştiind că $F : G \to G$, $F(x) = x^n$, este morfism de grup, să se arate că $(G, \cdot)$ este abelian.

Marin Stroe, Hunedoara, G.M. 12/2011

2. Se consideră şirul $(I_n)_{n\geq 1}$, dat prin relaţia $I_n = \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{x^{2n-1}}{(x^2+1)^n}\mathrm{d}x$, $n \geq 1$.

a) Studiaţi monotonia şi mărginirea şirului $(I_n)_{n\geq 1}$ şi calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} nI_n$.

b) Calculaţi $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2^k} - \frac{1}{5^k}\right)$.

Nicolae Papacu, Slobozia

3. Să se calculeze $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x + (\sin x)^{2012}}{1 + (\sin x)^{2012} + (\cos x)^{2012}}\mathrm{d}x$.

Florin Nicolaescu, Balş

Lista premianţilor

Premiul I: *Zecheru Daniela*, cls. a VII-a, C.N. „Al. I. Cuza“ Ploieşti; *Ceacîreanu Filip*, cls. a VIII-a, C.N. „M. Viteazul“ Ploieşti; *Gae Silviu*, cls. a IX-a, C.N. „Mihai Viteazul“ Slobozia; *Custură Adrian Mihai*, cls. a X-a, C.N. „Mihai Viteazul“ Slobozia; *Drăjneanu Diana*, cls. a XI-a, C.N. „Mihai Viteazul“ Slobozia; *Mihăilescu Elena*, clasa a XI-a, C.N. „I. L. Caragiale“ Ploieşti; *David Octavian*, cls. a XII-a, Liceul „A. Saligny“, Cernavodă.

Premiul al II-lea: *Dinu Sabina*, cls. a VII-a, Şcoala nr. 3 Slobozia; *Copaciu Tiberiu*, cls. a VIII-a, C.N. „Al. I. Cuza“ Ploieşti; *Bîrsan Andrei*, cls. a IX-a, C.N. „Mihai Viteazul“ Ploieşti; *Roşu Octavian*, cls. a IX-a, C.N. „I. L. Caragiale“ Ploieşti; *Ţuţuianu Ana Maria*, cls. a X-a, C.N. „Barbu Ştirbei“ Călăraşi; *Vasilache*

Cosmin, cls. a X-a, Liceul „A. Saligny“, Cernavodă; *Antohe Andreea*, cls. a XI-a, Liceul de Artă „Ionel Perlea“ Slobozia; *Veigang Rădulescu Vlad Petre*, cls. a XI-a, C.N. „I. L. Caragiale“ Ploieşti; *Buzilă Eugen*, cls. a XII-a, Liceul „Carol I“ Feteşti.

Premiul al III-lea: *Hristescu Andrei*, cls. a VII-a, Şcoala nr. 3 Slobozia; *Ţiţa Iulian*, cls. a VIII-a, Şcoala nr. 2 „I. H. Rădulescu“ Urziceni; *Matache Cristian*, cls. a IX-a, C.N. „I. L. Caragiale“ Ploieşti; *Şchiaua Dragoş*, cls. a X-a, C.N. „Mihai Viteazul“ Slobozia; *Ichim Georgiana*, cls. a XI-a, Liceul „A. Saligny“, Cernavodă; *Geambaşu George*, cls. a XII-a, C.N. „Mihai Viteazul“ Slobozia; *Panţîru Dragoş*, cls. a XII-a, Liceul „A. Saligny“, Cernavodă.

Premiul „F. Cioacă“ pentru originalitate: *Popescu Andreea*, cls. a VIII-a, Şcoala nr. 3 Slobozia; *Drăjneanu Diana*, cls. a XI-a, C.N. „Mihai Viteazul“ Slobozia.