PROBLEME

PROBLEME PENTRU EXAMENE NAŢIONALE[1)]

Clasa a VII-a

1. Care dintre numerele $-\dfrac{2011}{2012}$ şi $-\dfrac{2012}{2013}$ este mai mare?

2. Care este a 2012-a zecimală a numărului $\dfrac{1}{7}$?

3. Calculaţi suma divizorilor proprii ai numărului 28.

4. Perimetrul triunghiului echilateral ABC este de 18 cm. Aflaţi lungimea medianei BD, $D \in (AC)$.

5. În triunghiul ABC avem $M \in (AB)$ astfel încât $3 \cdot AM = 2 \cdot AB$ şi $N \in (AC)$ astfel încât $AC = 3 \cdot NC$. Stabiliţi poziţia dreptei MN faţă de dreapta BC.

6. În triunghiul ABC avem $AB = 10$ cm, $BC = 24$ cm şi $CA = 26$ cm. Ce lungime are înălţimea BM, $M \in (AC)$?

Clasa a VIII-a

7. Dacă $\sqrt{6} = \overline{a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots}$, precizaţi valoarea lui a_2.

8. Aflaţi media geometrică a numerelor $3 - \sqrt{5}$ şi $\sqrt{5} + 3$.

9. Aflaţi cel mai mare număr întreg, mai mic decât $1 - \sqrt{13}$.

10. Ce lungime are diagonala unui paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile 5 cm, 12 cm şi 13 cm?

11. Aflaţi lungimea înălţimii unei piramide patrulatere regulate cu feţele laterale triunghiuri echilaterale de latură 6 cm.

12. În paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ diagonalele AC' şi BD' sunt perpendiculare şi au lungimea de $8\sqrt{2}$ cm. Aflaţi dimensiunile paralelipipedului.

Claa a IX-a

13. Fie a, b, c trei zecimale consecutive ale numărului $4/37$. Să se calculeze $a^2 + b^2 + c^2$.

14. Să se arate că $(a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3 = 3(a-b)(b-c)(c-a)$, oricare ar fi $a, b, c \in \mathbb{R}$.

15. Numerele 2 şi 8 sunt termeni ai unei progresii geometrice. Să se arate că unul dintre numerele 32 sau $1/32$ este termen al progresiei.

16. Şirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este definit prin $a_1 = 1/2$ şi $a_{n+1} = a_n(1 - a_n)$, $n \geq 1$. Să se arate că şirul este monoton.

[1)] La problemele din această rubrică nu se primesc soluţii.

17. Considerăm pătratul $ABCD$ de latură 1. Să se calculeze modulul vectorului $\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$.

18. Fie ABC un triunghi şi M, N, P mijloacele laturilor BC, CA, AB. Să se arate că $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{0}$.

Clasa a X-a

19. Să se ordoneze crescător numerele $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$ şi $\sqrt[12]{72}$.

20. Să se determine cel mai mic număr natural $a > 1$ pentru care numărul $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}}$ este natural.

21. Fie $n \geq 2$ un număr natural şi $x \geq 1$ un număr real. Să se demonstreze că $[\log_n x] = [\log_n [x]]$.

22. Să se calculeze $(1+z_1)(1+z_2)(1+z_3)$, unde z_1, z_2, z_3 sunt rădăcinile cubice complexe ale unităţii.

23. Să se rezolve în mulţimea numerelor complexe ecuaţia $z^4 = \bar{z}$.

24. Să se determine suma modulelor soluţiilor complexe ale ecuaţiei $z^4 = 4$.

Clasa a XI-a

25. Considerăm şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ definit prin $a_1 = 1$ şi $a_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{a_n}$, $n \geq 1$. Fie $(f_n)_{n\geq 1}$ şirul lui *Fibonacci*.

a) Să se arate că $a_n = \dfrac{f_{n+1}}{f_n}$, oricare ar fi $n \geq 1$.

b) Să se arate că $f_n = \dfrac{a^n - b^n}{a - b}$, $n \geq 1$, unde $a = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $b = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

c) Să se calculeze limita şirului $(a_n)_{n\geq 1}$.

26. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Să se calculeze $\det(A)$.

b) Să se calculeze $\det(A^2 - A)$.

c) Să se determine valorile reale ale lui x pentru care $\det(A - xI_3) = 0$.

Clasa a XII-a

27. Considerăm funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |\sin x|$.

a) Să se calculeze $\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}x$.

b) Să se calculeze $\displaystyle\int_0^{n\pi} f(x)\mathrm{d}x$, $n \in \mathbb{N}$.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{\int\limits_0^t f(x)\mathrm{d}x}{t}$.

28. Se consideră grupul $(\mathbb{Z}_{12}, +)$.

a) Să se calculeze suma elementelor grupului.

b) Să se determine numărul elementelor de ordin 4 ale grupului.

c) Să se determine numărul subgrupurilor de ordin 3 ale grupului.