GAZETA MATEMATICĂ

SERIA B

PUBLICAŢIE LUNARĂ PENTRU TINERET

Fondată în anul 1895

ANUL CXVII nr. 12 **decembrie 2012**

ARTICOLE ŞI NOTE MATEMATICE

ASUPRA ECUAŢIEI FUNCŢIONALE A LUI WALTER RUDIN

Marian Andronache[1)] şi Dan Ştefan Marinescu[2)]

Abstract. This article introduces a new idea which can be used in tackling *Rudin*-type or *Pompeiu*-type functional equations, relying on monotonicity.

Keywords: *Rudin* functional equation, *Pompeiu* functional equation, monotonic function.

MSC : 26A48, 39B12.

1. Introducere

În American Mathematical Monthly 96 (641) din 1989, remarcabilul matematician american *Walter Rudin* a publicat următoarea problemă:

Problema 1.1. *Fie s, t numere reale. Găsiţi toate funcţiile derivabile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care verifică:*

$$f'(sx + ty) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$ cu $x \neq y$.

Datorită celebrităţii propunătorului, problema a stârnit interes.

În numărul din martie 1991 al revistei apar o soluţie şi o generalizare a acesteia datorate lui *M. Falkowitz*, respectiv lui *J. A. Baker* (vezi şi [4], pag. 43). În [1] *Kannappan*, *Sahoo* şi *Jacobson* rezolvă următoarea ecuaţie funcţională, care reprezintă o generalizare puternică a ecuaţiei funcţionale a lui *W. Rudin*.

1) Profesor, Colegiul Naţional „Sfântul Sava“, Bucureşti.

2) Profesor dr., Colegiul Naţional „Iancu de Hunedoara“, Hunedoara.

Problema 1.2. *Să se determine funcţiile $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, care verifică:*

$$\frac{f(x) - g(y)}{x - y} = h(sx + ty)$$

pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$ cu $x \neq y$, unde $s, t \in \mathbb{R}$ sunt numere date.

De remarcat că în toate enunţurile de mai sus domeniul de definiţie al funcţiei este $\mathbb{R}$.

În nota de faţă ne propunem abordarea unor ecuaţii funcţionale de acest tip, domeniul de definiţie fiind însă un interval deschis al axei reale. După cum uşor se va putea constata, tehnicile folosite de noi sunt diferite de cele din [1] sau [4].

Pentru scopul propus avem nevoie de paragraful care urmează, care, de altfel, prezintă interes în sine.

2. Legătura dintre monotonie şi valorile unei funcţii în două puncte medii, cu ponderi fixate

Peste tot în această notă I reprezintă un interval deschis al axei reale.

Rezultatul care urmează stabileşte echivalenţa monotoniei unei funcţii cu monotonia în două puncte medii, cu ponderi fixate.

Propoziţia 2.1. *Fie $a, b \in [0, 1]$ cu $a < b$ şi $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie. Atunci funcţia f este crescătoare dacă şi numai dacă, pentru orice $x, y \in I$ cu $x < y$,*

$$f(bx + (1 - b)y) \leq f(ax + (1 - a)y).$$

Demonstraţie. Necesitatea. Fie $x, y \in I$ cu $x < y$. Deoarece:

$$bx + (1 - b)y < ax + (1 - a)y,$$

din monotonia funcţiei f suntem conduşi la:

$$f(bx + (1 - b)y) \leq f(ax + (1 - a)y).$$

Suficienţa. Arătăm pentru început că f este local crescătoare, adică orice element din I are o vecinătate inclusă în I pe care funcţia f este crescătoare. Fie $x_0 \in I$; cum I este interval deschis, există $\varepsilon > 0$ astfel ca:

$$(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset I \text{ şi } \left(x_0 - \frac{a+b}{2-a-b}\varepsilon, x_0 + \frac{a+b}{2-a-b}\varepsilon\right) \subset I.$$

Vom arăta că f este crescătoare pe intervalul deschis:

$$I_{x_0} = \left(x_0 - \frac{b-a}{2-a-b}\varepsilon, x_0 + \frac{b-a}{2-a-b}\varepsilon\right).$$

Să observăm că $x_0 \in I_{x_0}$ şi $\dfrac{b-a}{2-a-b} \leq \dfrac{a+b}{2-a-b}$, de unde deducem că $I_{x_0} \subset I$. Fie $u, v \in I_{x_0}$, cu $u < v$. Atunci numerele $x = \dfrac{u(1-a) - v(1-b)}{b-a}$ şi $y = \dfrac{bv - au}{b-a}$ satisfac următoarele proprietăţi:

(i) $u = bx + (1-b)y$, $v = ax + (1-a)y$,

(ii) $x < y$, deoarece $x - y = \dfrac{u-v}{b-a} < 0$,

(iii) $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset I$, $y \in \left(x_0 - \dfrac{a+b}{2-a-b}\varepsilon, x_0 + \dfrac{a+b}{2-a-b}\varepsilon\right) \subset I$.

Într-adevăr, avem:

$$x = \frac{u(1-a) - v(1-b)}{b-a} <$$
$$< \frac{1-a}{b-a}\left(x_0 + \frac{b-a}{2-a-b}\varepsilon\right) - \frac{1-b}{b-a}\left(x_0 - \frac{b-a}{2-a-b}\varepsilon\right) = x_0 + \varepsilon$$

şi

$$x > \frac{1-a}{b-a}\left(x_0 - \frac{b-a}{2-a-b}\varepsilon\right) - \frac{1-b}{b-a}\left(x_0 + \frac{b-a}{2-a-b}\varepsilon\right) = x_0 - \varepsilon,$$

adică $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$.

Apoi, cum $y = \dfrac{bv - au}{b-a}$, obţinem:

$$y < \frac{b}{b-a}\left(x_0 + \frac{b-a}{2-a-b}\varepsilon\right) - \frac{a}{b-a}\left(x_0 - \frac{b-a}{2-a-b}\varepsilon\right) = x_0 + \frac{a+b}{2-a-b}\varepsilon$$

şi

$$y > \frac{b}{b-a}\left(x_0 - \frac{b-a}{2-a-b}\varepsilon\right) - \frac{a}{b-a}\left(x_0 + \frac{b-a}{2-a-b}\varepsilon\right) = x_0 - \frac{a+b}{2-a-b}\varepsilon,$$

adică:

$$y \in \left(x_0 - \frac{a+b}{2-a-b}\varepsilon, x_0 + \frac{a+b}{2-a-b}\varepsilon\right).$$

Din (i), (ii) şi (iii) deducem că:

$$f(u) = f(bx + (1-a)y) \leq f(ax + (1-a)y) = f(v)$$

şi, în consecinţă, funcţia f este local crescătoare pe I.

În sfârşit, fie $x, y \in I$ cu $x < y$. Cum funcţia f este local crescătoare, pentru orice $t \in [x, y]$ există un interval deschis I_t al axei reale, cu $I_t \subset I$, astfel ca funcţia f să fie crescătoare pe I_t. Cum $[x, y]$ este submulţime compactă a lui $\mathbb{R}$ şi familia de intervale deschise $(I_t)_{t \in [x,y]}$ acoperă pe $[x, y]$, există $n \in \mathbb{N}^\star$ şi $t_1, \ldots, t_n \in [x, y]$ astfel ca $I_{t_1}, I_{t_2}, \ldots, I_{t_n}$ acoperă intervalul $[x, y]$ şi, în consecinţă, $f(x) \leq f(y)$, adică funcţia f este crescătoare.

Corolarul 2.2. *În condiţiile Propoziţiei* 2.1*, funcţia f este descrescătoare dacă şi numai dacă, pentru orice $x, y \in I$ cu $x < y$,*

$$f(bx + (1 - b)y) \geq f(ax + (1 - a)y).$$

Demonstraţie. Se aplică Propoziţia 2.1 funcţiei $-f$.

Următorul rezultat se datorează lui *A. Varga* şi apare în [6]. De remarcat că demonstraţia dată în [6] se bazează pe cunoştinţe de analiză funcţională.

Corolarul 2.3. *Fie $\alpha, \beta \in (0,1)$ fixate astfel ca $\alpha \neq \beta$. Atunci funcţia $f : I \to \mathbb{R}$ este constantă dacă şi numai dacă, pentru orice $x, y \in I$,*

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) = f(\beta x + (1 - \beta)y).$$

Demonstraţie. Necesitatea este evidentă.

Suficienţa. Admitem că $\alpha < \beta$, în caz contrar raţionăm pentru $1 - \alpha$ şi $1 - \beta$. Luând în Propoziţia 2.1 şi Corolarul 2.2 $a = \alpha$ şi $b = \beta$ găsim că egalitatea din enunţ este posibilă dacă şi numai dacă f este crescătoare şi descrescătoare, adică f este constantă.

3. Două ecuaţii funcţionale înrudite cu ecuaţia lui Rudin

Propoziţia 3.1. *Fie $a \in [0,1]$, $a \neq \dfrac{1}{2}$ şi $f, g : I \to \mathbb{R}$ două funcţii. Atunci*:

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = g(ax + (1 - a)y),\ \forall\, x, y \in I,\ x \neq y,$$

dacă şi numai dacă există $m, n \in \mathbb{R}$ astfel ca $f(x) = mx + n$, $\forall\, x \in I$ şi $g(x) = m$, $\forall\, x \in I$.

Demonstraţie. Necesitatea. Datorită simetriei membrului stâng deducem că $g(ax + (1 - a)y) = g((1 - a)x + ay)$ pentru orice $x, y \in I$ cu $x \neq y$. Cum această egalitate este adevărată şi pentru $x = y$, din Corolarul 2.3 deducem că g este constantă, adică există $m \in \mathbb{R}$ astfel încât $g(x) = m$, $\forall\, x \in I$.

În aceste condiţii, ecuaţia funcţională conduce la:

$$f(x) - f(y) = m(x - y),\ \forall\, x, y \in I,$$

de unde rezultă că există $n \in \mathbb{R}$ astfel ca $f(x) = mx + n$, $\forall\, x \in I$.

Suficienţa este evidentă.

Corolarul 3.2. (*F. P. Callahan*, [4], pag. 332) *Fie $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă astfel încât*:

$$f(x) - f(y) = (x - y) \cdot f'((1 - \lambda)x - \lambda y),$$

pentru orice $x, y \in I$ şi un anumit $\lambda \in [0,1] \setminus \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$. Atunci f este funcţie polinomială, de grad cel mult 1.

Demonstraţie. Se aplică Propoziţia 3.1 cu $g = f'$ şi concluzia este imediată.

Următorul rezultat are ca punct de plecare teorema de medie a marelui matematician român *D. Pompeiu.* În [2] *D. Pompeiu* demonstrează că:

Dacă $a, b \in \mathbb{R}$, $0 \notin [a, b]$ *şi* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *este o funcţie continuă pe* $[a, b]$, *derivabilă pe* (a, b) *atunci există* $c \in (a, b)$ *astfel ca*:

$$\frac{af(b) - bf(a)}{a - b} = f(c) - cf'(c).$$

O demonstraţie a acestui rezultat se găseşte în [5] şi are la bază teorema de medie a lui *Lagrange*, iar o altă demonstraţie face apel la teorema de medie a lui *Cauchy* aplicată funcţiei f şi funcţiei $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ definită prin $g(x) = \dfrac{1}{x}$ pentru orice $x \in [a, b]$.

În [5], pag. 89, *P. K. Sahoo* şi *T. Riedel* rezolvă următoarea problemă, numită ecuaţia funcţională a lui *Pompeiu*:

Fie $s, t \in \mathbb{R}$ *şi* $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *două funcţii. Atunci*:

$$\frac{xf(y) - yf(x)}{x - y} = g(sx + ty),$$

pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$ *cu* $x \neq y$ *dacă şi numai dacă există* $m, n \in \mathbb{R}$ *astfel ca* $f(x) = mx + n$ *pentru orice* $x \in \mathbb{R}$ *şi*:

$$g(x) = \begin{cases} \text{arbitrar, cu } g(0) = n, & \text{dacă} \quad s = 0 = t \\ n, \text{ cu } g(0) \text{ arbitrar,} & \text{dacă} \quad s + t = 0 \text{ şi } x \neq 0 \\ n, & \text{în celelalte cazuri} \end{cases}.$$

În cele ce urmează, urmând calea Propoziţiei 3.1, vom găsi soluţiile ecuaţiei funcţionale de tip Pompeiu pe un interval deschis al axei reale.

Propoziţia 3.3. *Fie* $a \in [0, 1] \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$ *şi* $f, g : I \to \mathbb{R}$ *două funcţii. Atunci*:

$$\frac{xf(y) - yf(x)}{x - y} = g(ax + (1 - a)y),$$

pentru orice $x, y \in I$ *cu* $x \neq y$, *dacă şi numai dacă există* $m, n \in \mathbb{R}$ *astfel încât* $g(x) = n$ *şi* $f(x) = mx + n$ *pentru orice* $x \in I$.

Demonstraţie. Necesitatea. Din motive de simetrie a membrului stâng suntem conduşi la:

$$g(ax + (1 - a)y) = g((1 - a)x + ay)$$

pentru orice $x, y \in I$ şi atunci, conform Corolarului 2.3, există $n \in \mathbb{R}$ astfel ca $g(x) = n$, $\forall\, x \in I$. Ecuaţia funcţională devine:

$$xf(y) - yf(x) = n(x - y) \text{ pentru orice } x, y \in I$$

de unde deducem că există $m \in \mathbb{R}$ astfel ca $f(x) = mx + n$ pentru orice $x \in I$.

Suficienţa este evidentă.

Corolarul 3.4. *Fie* $a \in [0,1] \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$ *şi* $f : I \to \mathbb{R}$ *o funcţie derivabilă pe* I *astfel încât*:

$$xf(y) - yf(x) = (x - y) \cdot f'(ax + (1 - a)y)$$

pentru orice $x, y \in I$. *Atunci* f *este o funcţie polinomială de grad cel mult* 1.

Demonstraţie. Se aplică Propoziţia 3.3.

Observaţii

1. Rezultatele cuprinse în Propoziţia 3.1 şi 3.3 sunt valabile şi în cazul intervalelor care nu sunt deschise.

De exemplu, dacă b este un capăt al intervalului închis I, atunci Propoziţia 3.1 este valabilă pe interiorul lui I, adică există $m, n \in \mathbb{R}$ astfel ca $g(x) = m$, $f(x) = mx + n$, $\forall\, x \in \operatorname{int} I$ şi atunci:

$$\frac{f(b) - f(y)}{b - y} = m,$$

adică $f(b) = my + n + mb - my = mb + n$, ceea ce justifică afirmaţia făcută.

2. Nu ştim ce se întâmplă în cazul $a = \frac{1}{2}$ în cele două Propoziţii, în afara cazului particular când f este derivabilă.

Bibliografie

[1] Pl. Kannappan, P.K. Sahoo, M.S. Jacobson, *A characterization of low degree polynomials*, Demonstratio Math., 28, 1995, 87-96.

[2] D. Pompeiu, *Sur une proposition analogue au théorème des accroissements finis*, Mathematica (Cluj) 22, 1946, 143-146.

[3] W. Rudin, *E:3338*, American Mathematical Monthly, v96, 1989, 1.

[4] G. Sireţchi, *Analiză Matematică, Exerciţii avansate de calcul diferenţial şi integral real*, vol. II, Bucureşti, 1977.

[5] P. K. Sahoo, T. Riedel, *Mean value theorem and functional equations*, Singapore, 1998.

[6] A. Varga, *On a functional equation containing four weighted arithmetic means*, Banach Journal, Math. Anal. 2 (2008) no. 1, 21-32.