ASUPRA UNEI INEGALITĂŢI

Dumitru Acu[1)]

Abstract. This note generalizes and improves the inequality (1).
Keywords: Inequalities for sums.
MSC : 26D15

În [1], Problema 2.44, autorii demonstrează inegalitatea:

$$\frac{x_1}{x_2}+\sqrt{\frac{x_2}{x_3}}+\sqrt[3]{\frac{x_3}{x_1}}>\frac{3}{2}, \tag{1}$$

unde x_1, x_2, x_3 sunt numere reale pozitive.
Această notă este consacrată generalizării şi îmbunătăţirii inegalităţii (1).

Propoziţie. *Pentru $x_1, x_2, \ldots, x_n$ numere reale pozitive şi $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, are loc inegalitatea:*

$$\frac{x_1}{x_2}+\sqrt{\frac{x_2}{x_3}}+\sqrt[3]{\frac{x_3}{x_4}}+\cdots+\sqrt[n-1]{\frac{x_{n-1}}{x_n}}+\sqrt[n]{\frac{x_n}{x_1}}>\frac{2n-1}{n-1}. \tag{2}$$

Demonstraţie. Utilizând inegalitatea dintre media aritmetică şi media geometrică, obţinem:

$$\frac{x_1}{x_2}+\sqrt{\frac{x_2}{x_3}}+\sqrt[3]{\frac{x_3}{x_4}}+\cdots+\sqrt[n-1]{\frac{x_{n-1}}{x_n}}+\sqrt[n]{\frac{x_n}{x_1}}=$$

$$=\frac{x_1}{x_2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x_2}{x_3}}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x_2}{x_3}}+\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{x_3}{x_4}}+\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{x_3}{x_4}}+\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{x_3}{x_4}}+\cdots+$$

$$+\frac{1}{n}\sqrt[n]{\frac{x_n}{x_1}}+\frac{1}{n}\sqrt[n]{\frac{x_n}{x_1}}+\cdots+\frac{1}{n}\sqrt[n]{\frac{x_n}{x_1}}\geq$$

$$\geq\frac{n(n+1)}{2}\sqrt[\frac{n(n+1)}{2}]{\frac{1}{2^2}\cdot\frac{1}{3^3}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{n^n}}.$$

Acum, vom demonstra inegalitatea:

$$\frac{n(n+1)}{2}\sqrt[\frac{n(n+1)}{2}]{\frac{1}{2^2}\cdot\frac{1}{3^3}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{n^n}}>\frac{2n-1}{n-1},$$

$n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, care este echivalentă cu:

$$\frac{1}{2^2}\cdot\frac{1}{3^3}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{n^n}>\left(\frac{2(2n-1)}{(n-1)n(n+1)}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}. \tag{3}$$

Folosim inducţia matematică. Pentru $n=3$, din (3), obţinem:

$$\frac{1}{2^2}\cdot\frac{1}{3^3}>\left(\frac{2\cdot 5}{2\cdot 3\cdot 4}\right)^6,$$

[1)]Profesor univ.dr., Universitatea „Lucian Blaga“ din Sibiu, acu_dumitru@yahoo.com

echivalentă cu $6^3 \cdot 2^7 > 5^6$, inegalitate adevărată deoarece $6^3 > 5^3$ şi $2^7 > 5^3$.

Să presupunem că (3) este adevărată pentru $n \geq 3$ şi să demonstrăm că aceasta are loc şi pentru $n+1$, adică:

$$\frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{3^3} \cdot \dots \cdot \frac{1}{n^n} \cdot \frac{1}{(n+1)^{n+1}} > \left(\frac{2(2n+1)}{n(n+1)(n+2)} \right)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}. \tag{4}$$

Ţinând seama de (3), este suficient să demonstrăm:

$$\frac{1}{(n+1)^{n+1}} \left(\frac{2(2n-1)}{(n-1)n(n+1)} \right)^{\frac{n(n+1)}{2}} > \left(\frac{2(2n+1)}{n(n+1)(n+2)} \right)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}. \tag{5}$$

După ce ridicăm în inegalitatea (5) la puterea $\dfrac{2}{n+1}$ şi efectuăm simplificările posibile, obţinem inegalitatea:

$$(2n-1)^n n^2 (n+2)^{n+2} > 4(2n+1)^{n+2}(n-1)^n.$$

Această inegalitate se scrie şi sub forma:

$$\big((2n-1)(n+2)\big)^n \cdot n^2(n+2)^2 > \big((2n+1)(n-1)\big)^n \cdot 4(2n+1)^2$$

sau:

$$(2n^2+3n-2)^n(n^2+2n)^2 > (2n^2-n-1)^n(4n+2)^2. \tag{6}$$

Cum:

$$2n^2+3n-2 > 2n^2-n-1 > 1$$

şi:

$$n^2+2n > 4n+2 > 1,$$

pentru orice număr natural n, $n \geq 3$, avem:

$$(2n^2+3n-2)^n > (2n^2-n-1)^n$$

şi

$$(n^2+2n)^2 > (4n+2)^2, \quad n \in \mathbb{N}, \ n \geq 3.$$

Rezultă că inegalitatea (6) este adevărată şi deci inegalităţile (5) şi (4) sunt adevărate. Cu acestea, inegalitatea (3) este adevărată pentru orice n natural, $n \geq 3$.

În concluzie, inegalitatea (1) este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$.

Bibliografie

[1] L. Panaitopol, V. Băndilă, M. Lascu, *Inegalităţi*, Ed. GIL, Zalău, 1995