F. *Scrierea numărului* 2011 *ca sumă de patru pătrate.*

După o teoremă a lui *Lagrange* ([1], pag. 86) orice număr natural se poate scrie ca o sumă de patru pătrate de numere întregi. În particular şi 2011.

Cum $29^2 = 20^2 + 21^2$ şi $39^2 = 36^2 + 15^2$, din (3) şi (2) avem:

$$2011 = 9^2 + 20^2 + 21^2 + 33^2 \quad \text{şi} \quad 2011 = 7^2 + 15^2 + 21^2 + 36^2.$$

Mai avem, de exemplu, şi:

$$2011 = 1^2 + 5^2 + 31^2 + 32^2 \quad \text{şi} \quad 2011 = 1^2 + 4^2 + 25^2 + 37^2.$$

Bibliografie

[1] I. Cucurezeanu, *Pătrate şi cuburi de numere întregi*, Editura GIL, Zalău, 2007.

UTILIZAREA CONVEXITĂŢII FUNCŢIEI PUTERE ÎN REZOLVAREA UNOR ECUAŢII

Marin Toloşi[1)]

Abstract. The author solve two interesting equations using the convexity of power function.

Keywords: Power function, equation, convex function.
MSC : 26A51

Scopul acestei note este de a rezolva două probleme de concurs utilizând convexitatea funcţiei putere. În acelaşi timp se urmăreşte să se pună în evidenţă faptul că, în unele cazuri, această metodă este naturală şi elegantă.

1. Introducere

În manualele şcolare, graficul funcţiei putere apare doar pentru câteva valori raţionale ale exponentului. Se omite prezentarea grafică a funcţiei putere cu exponent real oarecare (raţional sau iraţional, [2]) de unde în urma unei lecturi grafice s-ar putea obţine informaţii despre convexitatea (concavitatea) acesteia.

Deşi mai rar, în concursuri se întâlnesc probleme în care apare funcţia putere cu exponent care poate fi şi iraţional. Dăm în continuare două exemple:

Problema 1. Să se rezolve ecuaţia: $x^{a^x} = a^{x^a}$, $a \in (0, 1)$.

I V. Maftei şi *T. Andreescu*

Olimpiada de matematică, Etapa Judeţeană, 1983

Problema 2. Să se rezolve ecuaţia: $2^{\lg x} + 8 = (x - 8)^{\frac{1}{\lg 2}}$.

Daniel Jinga

Olimpiada de matematică, Etapa Judeţeană, 2001

1) Profesor, C. N. „Radu Greceanu“, Slatina, Olt

2. Preliminarii

a) Funcţia putere este de forma: $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^{\alpha}$, unde $D = [0, +\infty)$ pentru $\alpha > 0$ şi $D = (0, +\infty)$ pentru $\alpha < 0$. Din lectura graficului funcţiei putere (vezi [2]) rezultă uşor că:

i) Pentru $\alpha \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ funcţia putere este strict convexă.

ii) Pentru $\alpha \in (0, 1)$ funcţia putere este strict concavă.

b) Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval şi $f, g : I \to \mathbb{R}$ două funcţii pozitive, strict monotone de acelaşi sens şi strict convexe. Atunci fg este o funcţie strict convexă (vezi [1]).

c) Fie $a \in \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$ şi $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ o funcţie strict convexă. Dacă $f(a) < 0$ atunci ecuaţia $f(x) = 0$ admite cel mult o soluţie.

Demonstraţie. Presupunem prin reducere la absurd că există $x_1, x_2 \in [a, b)$ astfel încât $a < x_1 < x_2$ şi $f(x_1) = f(x_2) = 0$. Din $a < x_1 < x_2$ rezultă că există $t \in (0, 1)$ astfel încât $x_1 = (1 - t)a + tx_2$.

De aici şi din stricta convexitate a lui f avem că $f(x_1) < (1 - t)f(a) + tf(x_2)$ de unde $0 < (1 - t)f(a)$, deci $f(a) > 0$, ceea ce este fals.

Analog se demonstrează următoarea proprietate:

d) Dacă $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$ şi $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ este o funcţie strict convexă şi $f(b) < 0$ atunci ecuaţia $f(x) = 0$ admite cel mult o soluţie.

3. Rezolvarea problemelor

Problema 1. Din condiţiile de existenţă avem $x \geq 0$. Se vede că $x = 0$ nu este soluţie.

Prin logaritmare în baza a, ecuaţia devine:

$$a^x \log_a x - x^a = 0, \quad x > 0. \tag{1}$$

Cum $0 < a < 1$, pentru $x > 1$ avem $a^x > 0$, $\log_a x < 0$ şi $x^a > 0$ deci $a^x \log_a x - x^a < 0$. De aici, în baza relaţiei (1), deducem că ecuaţia nu are soluţii $x > 1$.

Presupunem în continuare că $x \in (0, 1]$. Considerăm funcţiile:

$f_1, f_2, f_3, f : (0, 1] \to \mathbb{R}$, unde $f_1(x) = a^x$, $f_2(x) = \log_a x$, $f_3(x) = x^a$ şi $f = f_1 f_2 - f_3$.

Conform lui (1) ecuaţia devine $f(x) = 0$, $x \in (0, 1]$. Din $0 < a < 1$ rezultă că f_1, f_2 sunt pozitive, strict descrescătoare şi strict convexe, de unde, conform punctului b), rezultă că $f_1 f_2$ este strict convexă, (2).

Dar din punctual a) subpunctul ii) avem că f_3 este strict concavă, deci $-f_3$ este strict convexă. De aici şi din (2) rezultă că f este strict convexă ca sumă de funcţii strict convexe.

Din $f(1) = -1 < 0$ şi ţinând seama de punctul d) deducem că ecuaţia $f(x) = 0$ are cel mult o soluţie pe $(0, 1]$. Cum $f(a) = 0$, concluzia este că ecuaţia admite numai soluţia $x = a \in (0, 1]$.

Problema 2. Din condiţii, avem $x \in [8, +\infty)$.

Cum $2^{\lg x} = x^{\lg 2}$, ecuaţia devine:

$$(x - 8)^{\frac{1}{\lg 2}} - x^{\lg 2} - 8 = 0. \tag{3}$$

Considerăm funcţiile:

$f_1 : [8, +\infty) \to \mathbb{R},\ f_1(x) = x^{\lg 2},\ \varphi : [8, +\infty) \to [0, +\infty),\ \varphi(x) = x - 8,$

$$g : [0, +\infty) \to \mathbb{R},\ \ g(x) = x^{\frac{1}{\lg 2}} \text{ şi } f_2 : [0, +\infty) \to \mathbb{R}, \text{ unde } f_2 = g \circ \varphi. \quad (4)$$

Cum $0 < \lg 2 < 1$, conform punctului a) subpunctul ii) avem că f_1 este strict concavă, deci $-f_1$ este strict convexă, (5).

Din $\dfrac{1}{\lg 2} > 1$ şi din punctual a) subpunctul i) rezultă că g este strict convexă şi cum φ este afină, în baza lui (4) deducem că funcţia f_2 este strict convexă, (6).

Fie $f : [8, +\infty) \to \mathbb{R}$, unde $f = f_2 - f_1 - 8$. Din (5) şi (6) rezultă că f este strict convexă. De aici şi din (3) rezultă că ecuaţia dată este echivalentă cu ecuaţia $f(x) = 0$. Cum $f(8) = -8^{\lg 2} - 8 < 0$, ţinând seama de c) deducem că ecuaţia $f(x) = 0$ are cel mult o soluţie. Dar $f(10) = 0$, $10 \in [8, +\infty)$, deci $x = 10$ este unica soluţie a ecuaţiei date.

Bibliografie

[1] D. S. Mitrinović, *Analytic Inequalities*, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1970.
[2] S. I. Novoselov, *Curs special de algebră elementară*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1955.

EXAMENE ŞI CONCURSURI

A 62-A OLIMPIADĂ NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
Oradea, 18 aprilie 2011

prezentare de Marian Andronache [1)] şi Dinu Şerbănescu[2)]

Enunţuri
Clasa a VII-a

1. Determinaţi numerele naturale r cu proprietatea că există numerele naturale prime p şi q astfel încât $p^2 + pq + q^2 = r^2$.

Aurel Bârsan, Braşov

2. În patrulaterul convex $ABCD$ avem că $\mathrm{m}(\sphericalangle BCD) = \mathrm{m}(\sphericalangle ADC) \geq 90°$. Bisectoarele unghiurilor BAD şi ABC se intersectează în M. Demonstraţi că dacă $M \in CD$, atunci M este mijlocul lui $[CD]$.

Maria Miheţ, Timişoara

3. Numerele x, y, z, t, a şi b sunt naturale şi nenule. Ştiind că $xt - yz = 1$ şi $\dfrac{x}{y} > \dfrac{a}{b} > \dfrac{z}{t}$, demonstraţi că $ab \geq (x + z)(y + t)$.

Dan Nedeianu, Drobeta-Turnu Severin

1) Profesor, C. N. „Sf. Sava“, Bucureşti
2) Profesor, C. N. „Sf. Sava“, Bucureşti