GAZETA MATEMATICĂ

SERIA B

PUBLICAŢIE LUNARĂ PENTRU TINERET

Fondată în anul 1895

ANUL CXVI nr. 4 **aprilie 2011**

ARTICOLE ŞI NOTE MATEMATICE

PROPRIETĂŢI DE INTEGRABILITATE ABSOLUTĂ

Eugen Păltănea[1] şi Cristian Chiser[2]

Abstract. We present some properties of absolute convergent integrals. Our results extend an interesting contest problem of *M. Piticari* and *S. Rădulescu.*

Keywords: limits, continuity, convergent integrals

MSC : 26A03, 26A15, 40A10

În lucrarea de faţă ne propunem să discutăm un rezultat interesant datorat lui *Mihai Piticari* şi *Sorin Rădulescu.* Enunţul, formulat ca *problemă de concurs* (Problema 1/Cl. a XII-a, a 51-a Olimpiadă Naţională de Matematică, Braşov, aprilie 2000), indică practic o metodă de calcul a valorii unei integrale improprii convergente. Astfel, autorii evidenţiază următoarea proprietate (a se vedea [1]):

Dacă $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ *este o funcţie continuă, astfel încât există şi este finită limita* $\lim\limits_{x\to\infty} x f(x)$*, atunci există de asemenea limita finită* $\lim\limits_{t\to\infty} \int_1^t \frac{f(x)}{x} \mathrm{d}x$*, iar pentru oricare* $a > 1$*, are loc egalitatea:*

$$\lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{f(x)}{x} \mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty} t \int_1^a f\left(x^t\right) \mathrm{d}x.$$

Enunţul de mai sus poate fi reformulat în limbajul specific al integralelor definite pe intervale necompacte. Prin definiţie, convergenţa unei *integrale*

[1] Profesor, Universitatea „Transilvania“, Braşov

[2] Colegiul Naţional „Elena Cuza“, Craiova

improprii $\int_1^\infty g(x)\mathrm{d}x$, unde $g:[1,\infty)\to\mathbb{R}$ este o funcţie integrabilă pe toate intervalele compacte incluse în $[1,\infty)$, înseamnă existenţa şi finitudinea limitei $I=\lim\limits_{t\to\infty}\int_1^t g(x)\mathrm{d}x$. Această limită se va numi valoarea integralei improprii şi se va nota $I=\int_1^\infty g(x)\mathrm{d}x$. Menţionăm de asemenea că, în acest caz, $\lim\limits_{t\to\infty}\int_t^\infty g(x)\mathrm{d}x=0$, unde $\int_t^\infty g(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{u\to\infty}\int_t^u g(x)\mathrm{d}x$.

Astfel, enunţul pe care îl analizăm indică o condiţie suficientă de convergenţă a integralei improprii $\int_1^\infty \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ şi o metodă de calcul a acestei integrale:

$$\lim_{t\to\infty} t\int_1^a f(x^t)\,\mathrm{d}x=\int_1^\infty \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x,$$

unde $a\in(1,\infty)$ reprezintă o constantă arbitrară.

Notând $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$, $x\geq 1$, putem rezuma acest enunţ la următoarea implicaţie:

$$\lim_{x\to\infty} x^2 g(x)\in\mathbb{R}\;\Rightarrow\;\int_1^\infty g(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{t\to\infty} t\int_1^a x^t g(x^t)\,\mathrm{d}x\in\mathbb{R},\ \forall\, a>1,$$

unde $g:[1,\infty)\to\mathbb{R}$ este o funcţie continuă.

Existenţa limitei finite $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 g(x)$ asigură aşadar convergenţa integralei improprii $\int_1^\infty g(x)\,\mathrm{d}x$. Vom remarca faptul că mărginirea funcţiei $h_\alpha:[1,\infty)\to\mathbb{R}$, $h_\alpha(x)=x^\alpha g(x)$, unde $\alpha>1$, reprezintă de asemenea o condiţie clasică suficientă pentru convergenţa integralei $\int_1^\infty g(x)\,\mathrm{d}x$. Astfel, fie $\alpha>1$. Presupunem că există $M>0$ astfel ca $|h_\alpha(x)|\leq M$, $\forall\, x\geq 1$, sau $|g(x)|\leq Mx^{-\alpha}$, $\forall\, x\geq 1$. Dar $\int_1^\infty x^{-\alpha}\,\mathrm{d}x$ este convergentă, cu

$\int\limits_1^\infty x^{-\alpha}\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{t\to\infty}\int\limits_1^t x^{-\alpha}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{\alpha-1}$. Atunci, integrala improprie $\int\limits_1^\infty |g(x)|\,\mathrm{d}x$ este convergentă, deci, conform *criteriului de absolut convergenţă*, $\int\limits_1^\infty g(x)\,\mathrm{d}x$ este convergentă. Pentru detalii se pot consulta, de exemplu, monografiile clasice [2] (Cap. IV) şi [3] (Cap. 11).

O întrebare firească este următoarea: rămâne valabil rezultatul indicat de problema de concurs menţionată, în cazul general al funcţiilor continue $f : [1,\infty) \to \mathbb{R}$ având proprietatea că integrala improprie $\int\limits_1^\infty |f(x)/x|\,\mathrm{d}x$ este convergentă? Răspunsul la această întrebare este afirmativ.

Precizăm că, în terminologia uzuală, o funcţie g se numeşte *absolut integrabilă* pe $[1,\infty)$ dacă $\int\limits_1^\infty |g(x)|\,\mathrm{d}x$ este convergentă.

Teorema 1. *Fie* $g : [1,\infty) \to \mathbb{R}$ *o funcţie continuă, absolut integrabilă pe* $[1,\infty)$. *Atunci, pentru oricare* $a > 1$, *are loc:*

$$\lim_{t\to\infty} t\int\limits_1^a x^t g(x^t)\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^\infty g(y)\mathrm{d}y.$$

Demonstraţie. Conform ipotezei, există şi este finită integrala improprie:

$$A := \int\limits_1^\infty |g(y)|\mathrm{d}y = \lim_{t\to\infty}\int\limits_1^t |g(y)|\mathrm{d}y.$$

Cum g este absolut integrabilă pe $[1,\infty)$, ea este integrabilă pe $[1,\infty)$, deci există şi este finită integrala improprie:

$$I := \int\limits_1^\infty g(y)\mathrm{d}y = \lim_{t\to\infty}\int\limits_1^t g(y)\mathrm{d}y.$$

Fie $a > 1$.

Dovedim $\lim\limits_{t\to\infty} t\int\limits_1^a x^t g(x^t)\,\mathrm{d}x = I$. Notăm $F(t) = t\int\limits_1^a x^t g(x^t)\,\mathrm{d}x$, $t > 0$.

Prin schimbarea de variabilă $y = x^t$ obţinem $F(t) = \int\limits_1^{a^t} y^{1/t} g(y)\mathrm{d}y$, $t > 0$.

Pentru oricare $b > 1$ şi oricare $t > 0$, cu $a^t > b$, avem:

$$|F(t)-I| \le \left|\int_1^b g(y)\left(y^{\frac{1}{t}}-1\right)\mathrm{d}y\right| + \left|\int_b^{a^t} g(y)\left(y^{\frac{1}{t}}-1\right)\mathrm{d}y\right| + \left|\int_{a^t}^{\infty} g(y)\,\mathrm{d}y\right| \le$$

$$\le \int_1^b |g(y)|\left(y^{\frac{1}{t}}-1\right)\mathrm{d}y + \int_b^{a^t} |g(y)|\left(y^{\frac{1}{t}}-1\right)\mathrm{d}y + \int_{a^t}^{\infty} |g(y)|\,\mathrm{d}y. \quad (1)$$

Fie $\varepsilon > 0$. Există $b > 1$ astfel ca $\int\limits_b^{\infty} |g(y)|\,\mathrm{d}y < \frac{\varepsilon}{2a}$. Funcţia continuă $|g|$ este mărginită pe intervalul compact $[0, b]$ (conform teoremei lui *Weierstrass*), deci există $m > 0$ astfel încât $|g(y)| \le m$, $\forall\, y \in [0, b]$. Evident, $\lim\limits_{t\to\infty} a^t = \infty$ şi $\lim\limits_{t\to\infty}\left(b^{\frac{1}{t}}-1\right) = 0$. Atunci există $t_0 > 0$ astfel încât $a^{t_0} > b$ şi $b^{\frac{1}{t_0}} - 1 <$ $< \frac{\varepsilon}{2m(b-1)}$. Din relaţia (1), obţinem:

$$|F(t)-I| \le m(b-1)\left(b^{\frac{1}{t}}-1\right) + (a-1)\int_b^{a^t} |g(t)|\mathrm{d}t + \int_b^{\infty} |g(t)|\mathrm{d}t <$$

$$< m(b-1)\frac{\varepsilon}{2m(b-1)} + (a-1)\frac{\varepsilon}{2a} + \frac{\varepsilon}{2a} = \varepsilon,$$

pentru oricare $t > t_0$. Ca urmare, $\lim\limits_{t\to\infty} F(t) = I$. □

În problema sursă şi în teorema anterioară, funcţia exponenţială cu baza supraunitară $u(t) = a^t$ joacă un rol particular. În fapt, abstracţie făcând de o schimbare de variabilă, se pune problema stabilirii unor condiţii suficiente pentru egalitatea:

$$\int_1^{\infty} g(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty}\int_1^{u(t)} x^{v(t)} g(x)\,\mathrm{d}x, \quad (2)$$

unde g este funcţie continuă şi absolut integrabilă pe $[1, \infty)$, iar u şi v sunt funcţii continue pe $(0, \infty)$. Astfel, putem formula alte două extinderi naturale ale problemei de concurs discutate.

Teorema 2. *Fie funcţiile continue* $g : [1, \infty) \to \mathbb{R}$, $u : (0, \infty) \to [1, \infty)$ *şi* $v : (0, \infty) \to (0, \infty)$, *astfel ca* $\lim\limits_{t\to\infty} u(t) = \infty$ *şi* $\lim\limits_{t\to\infty} v(t) = 0$.

1) *Dacă* g *este absolut integrabilă pe* $[1, \infty)$ *şi* u^v *este mărginită, atunci relaţia* (2) *este satisfăcută.*

2) *Dacă există* $\alpha > 1$ *astfel ca funcţia* $h_\alpha(x) = x^\alpha g(x)$, $x \ge 1$, *să fie mărginită, atunci* g *este absolut integrabilă pe* $[1, \infty)$, *iar relaţia* (2) *este satisfăcută.*

Demonstraţie. 1) Conform ipotezei, există $K > 1$ astfel ca $u(t)^{v(t)} \in \in [1, K]$, $\forall\, t > 0$. Fie $\varepsilon > 0$. Există $b > 1$ astfel ca $\int_b^{\infty} |g(x)|\,\mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{2K}$. De asemenea, există $t_0 > 0$ astfel încât:

$$b^{v(t)} - 1 < \frac{\varepsilon}{2\left(\int_1^b |g(x)|\,\mathrm{d}x\right)} \quad \text{şi} \quad u(t) > b, \quad \text{pentru oricare} \quad t > t_0.$$

Atunci, pentru oricare $t > t_0$, avem:

$$\left| \int_1^{u(t)} x^{v(t)} g(x)\,\mathrm{d}x - \int_1^{\infty} g(x)\,\mathrm{d}x \right| \leq$$

$$\leq \int_1^b \left(x^{v(t)} - 1\right) |g(x)|\,\mathrm{d}x + \int_b^{u(t)} \left(x^{v(t)} - 1\right) |g(x)|\,\mathrm{d}x + \int_{u(t)}^{\infty} |g(x)|\,\mathrm{d}x \leq$$

$$\leq \left(b^{v(t)} - 1\right) \int_1^b |g(x)|\,\mathrm{d}x + (K-1) \int_b^{u(t)} |g(x)|\,\mathrm{d}x + \int_{u(t)}^{\infty} |g(x)|\,\mathrm{d}x < \varepsilon.$$

Astfel, relaţia (2) este dovedită.

2) Fie $\alpha > 1$ cu proprietatea din enunţ. Există $M > 0$ astfel încât $|g(x)| \leq M x^{-\alpha}$, pentru oricare $x \in [1, \infty)$. Absolut integrabilitatea lui g a fost discutată anterior. Deoarece $\lim\limits_{t\to\infty} v(t) = 0$, putem alege $t_1 > 0$ astfel ca $v(t) < \alpha - 1$, $\forall\, t > t_1$. Atunci, pentru $t > t_1$, avem:

$$\left| \int_1^{u(t)} x^{v(t)} g(x)\,\mathrm{d}x - \int_1^{u(t)} g(x)\,\mathrm{d}x \right| \leq \int_1^{u(t)} \left(x^{v(t)} - 1\right) |g(x)|\,\mathrm{d}x \leq$$

$$\leq M \int_1^{u(t)} \left(x^{v(t)} - 1\right) x^{-\alpha}\,\mathrm{d}x =$$

$$= M \left\{ \frac{v(t)}{(\alpha-1)(\alpha-1-v(t))} + \frac{[u(t)]^{1-\alpha}}{\alpha-1} - \frac{[u(t)]^{v(t)+1-\alpha}}{\alpha-1-v(t)} \right\}.$$

Dar, în conformitate cu ipoteza:

$$\lim_{t\to\infty} \left\{ \frac{v(t)}{(\alpha-1)(\alpha-1-v(t))} + \frac{[u(t)]^{1-\alpha}}{\alpha-1} - \frac{[u(t)]^{v(t)+1-\alpha}}{\alpha-1-v(t)} \right\} = 0,$$

deci:

$$\lim_{t\to\infty}\left(\int_1^{u(t)} x^{v(t)}g(x)\,\mathrm{d}x-\int_1^{u(t)} g(x)\,\mathrm{d}x\right)=0.$$

Rezultă:

$$\lim_{t\to\infty}\int_1^{u(t)} x^{v(t)}g(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{t\to\infty}\left(\int_1^{u(t)} x^{v(t)}g(x)\,\mathrm{d}x-\int_1^{u(t)} g(x)\,\mathrm{d}x\right)+$$

$$+\lim_{t\to\infty}\int_1^{u(t)} g(x)\,\mathrm{d}x=\int_1^{\infty} g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Astfel, teorema este demonstrată. □

Bibliografie

[1] M. Andronache, D. Şerbănescu, *A 51-a Olimpiadă Naţională de Matematică, Braşov, Aprilie 2000*, Gazeta Matematică Seria B, Nr. 7-8/2000, 261-278.

[2] M. Nicolescu, N. Dinculeanu, S. Marcus, *Analiză Matematică*, Vol. II, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1971.

[3] Gh. Sireţchi, *Calcul diferenţial şi integral*, Vol. I, Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1985.

UN CRITERIU DE IREDUCTIBILITATE LA POLINOAME

RICĂ ZAMFIR[1)]

Abstract. The note presents a criterion of irreducibility for polynomials in $\mathbb{Z}[X]$.

Keywords: irreducible polynomial, prime number

MSC : 11R09

În [2] *L. Panaitopol* şi *D. Ştefănescu* au demonstrat următorul rezultat:

Teorema A. *Fie* $f=a_0+a_1X+\ldots+a_nX^n\in\mathbb{Z}[X]$ *astfel încât* $|a_0|>|a_1|+|a_2|+\ldots+|a_n|$.

Dacă a_0 *este număr prim sau* $\sqrt{|a_0|}-\sqrt{|a_n|}<1$, *atunci* f *este ireductibil în* $\mathbb{Z}[X]$.

În cele ce urmează dorim să demonstrăm, utilizând o idee din demonstraţia teoremei A, următoarea teoremă:

Teorema 1. *Fie* $a_0,a_1,\ldots,a_n$ *numere naturale nenule astfel încât şirul* $(a_k)_{0\le k\le n}$ *să fie strict monoton.*

1)Profesor dr., C.N.I. „T. Vianu“, Bucureşti, rzamfir62@gmail.com