O INEGALITATE A LUI JACOB STEINER

Dorin Mărghidanu[1)]

Abstract. In this note we emphasize the inequality $\mathrm{e}^x \geq x^{\mathrm{e}}$, $(x > 0)$ and the relations beetwen this and other inequalities.
Are shown eleven analytic proofs and three consequences.

Keywords: Steiner's inequality, Euler, the number e, means inequality
MSC : 26A06, 26D15.

În această lucrare ne propunem să aprofundăm pe cale analitică următoarea inegalitate:

1. Lemă (inegalitatea lui Steiner). *Pentru orice* $x > 0$*, avem*

$$\mathrm{e}^x \geq x^{\mathrm{e}}, \tag{1}$$

cu egalitate pentru $x = \mathrm{e}$.

Demonstraţie. Considerăm funcţia $f_1 : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = \dfrac{x^{\mathrm{e}}}{\mathrm{e}^x}$, care are derivata $f_1'(x) = \dfrac{\mathrm{e}x^{\mathrm{e}-1}\mathrm{e}^x - x^{\mathrm{e}}\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}} = \dfrac{x^{\mathrm{e}-1}(\mathrm{e} - x)}{\mathrm{e}^x}$.

Se observă cu uşurinţă că $x_0 = \mathrm{e}$ este abscisă pentru punctul de maxim absolut al funcţiei f_1 pe intervalul $(0, \infty)$. Vom avea deci,

$$f_1(x) \leq f_1(\mathrm{e}) \Leftrightarrow \frac{x^{\mathrm{e}}}{\mathrm{e}^x} \leq 1 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x \geq x^{\mathrm{e}}.$$

2. Consecinţă şi o scurtă notiţă istorică

Scriind inegalitatea (1) sub forma echivalentă:

$$\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}} \geq x^{\frac{1}{x}}, \quad \forall\, x \in (0, \infty), \tag{1'}$$

obţinem răspunsul la o veche problemă pusă în *Journal de Crelle*, vol. XL , în anul 1850 de către marele matematician *Jacob Steiner* ([3], [13]), privitoare la maximumul lui $x^{\frac{1}{x}}$ (sau a lui $\sqrt[x]{x}$ – în notaţia de atunci...). Răspunsul la *problema lui Steiner*, este acum imediat: anume maximumul cerut are loc – conform $(1')$ – atunci când $x = \mathrm{e}$.

Iată şi ideea din demonstraţia originală din [13], (reluată şi în [3] şi [5]) – idee centrată pe utilizarea inegalităţii foarte cunoscute, $\mathrm{e}^y \geq 1 + y$. Într-adevăr luând $y = \dfrac{x}{\mathrm{e}} - 1$, obţinem:

$$\mathrm{e}^{\frac{x}{\mathrm{e}} - 1} \geq \frac{x}{\mathrm{e}} \Leftrightarrow \mathrm{e}^{\frac{x}{\mathrm{e}}} \geq x \Leftrightarrow \mathrm{e}^x \geq x^{\mathrm{e}} \Leftrightarrow \mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}} \geq x^{\frac{1}{x}}.$$

[1)]Profesor dr., C. N. „A.I. Cuza“, Corabia, jud. Olt, e-mail: d.marghidanu@gmail.com

3. Observaţie. Datorită celor prezentate anterior şi ca o recunoaştere postumă în descoperirea acestei mici bijuterii matematice – în onoarea ilustrului matematician elveţian – am numit inegalitatea din Lemă (ca de altfel şi echivalenta ei din (1′)), inegalitatea lui *Steiner*.

4. Observaţie. În [15] este prezentată o demonstraţie fără derivate a inegalităţii $\mathrm{e}^x \geq 1 + x$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, cu egalitate, dacă şi numai dacă $x = 0$. În monografia [16], pp. 208-212, *Andrei Vernescu*, pe lângă inegalităţile (1), (1′) şi $\mathrm{e}^x \geq 1 + x$, considerate mai sus, mai demonstrează şi inegalităţile:

(i) $\mathrm{e}^x \geq \mathrm{e}x$, pentru orice x real (cu egalitate $\Leftrightarrow x = 1$);

(ii) $x^x \geq \left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)^{\frac{1}{\mathrm{e}}}$, pentru orice x real pozitiv (cu egalitate $\Leftrightarrow x = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$).

Este demonstrată şi echivalenţa tuturor acestor cinci inegalităţi. Sunt prezentate, de asemenea, şi interpretările grafice corespunzatoare, demonstrându-se că toate inegalităţile respective au loc doar în baza e (pp. 212-214), iar apoi este făcut un studiu detaliat al inegalităţii $a^x \geq 1 + x$, când baza $a > 1$ este mai mare, respectiv mai mică decât e. În sfârşit, în [11] este stabilit că graficele funcţiilor $x \mapsto a^x$ şi $x \mapsto \log_a x$ ($a > 1$, $x > 0$) sunt tangente dacă şi numai dacă $a = \mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}$, punctul de tangenţă fiind cel de coordonate $x_0 = \mathrm{e}$, $y_0 = \mathrm{e}$.

5. Demonstraţii alternative pentru inegalitatea lui Steiner

Pe lângă demonstraţia deja prezentată, vom oferi şi alte demonstraţii pentru inegalitatea (1). Vor fi utilizate cunoştinţe simple privind monotonia funcţiilor şi natura extremelor unei funcţii.

Elementul comun al tuturor acestor demonstraţii îl constituie prelucrarea analitică a unor funcţii asociate – potrivit alese. Chiar şi demonstraţia originală din [13], de mai sus, se poate aranja în următoarea prezentare care face să apară funcţii:

Demonstraţia 2. Se consideră funcţia $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_2(x) = \mathrm{e}^x - x - 1$, pentru care $x_0 0$ este minim absolut al funcţiei, deci $f_2\left(\dfrac{x}{\mathrm{e}} - 1\right) \leq f_2(0)$ – şi apoi ca mai sus.

Pe lângă demonstraţia din Lemă, prezentăm încă două demonstraţii în care apar expresiile e^x şi x^{e}.

Demonstraţia 3 (vezi şi [14]). Alegem de această dată funcţia:

$$f_3 : (0, \infty) \to \mathbb{R}, \;\; f_3(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{x^{\mathrm{e}}} \left(= \frac{1}{f_1(x)}\right).$$

Acum, fie folosind expresia derivatei $f_3'(x) = \dfrac{x^{\mathrm{e}-1}(x - \mathrm{e})}{\mathrm{e}^x}$, fie faptul că f_3 este „răsturnata“ funcţiei f_1, deducem că $x_0 = \mathrm{e}$ este punct de minim absolut al lui f_3. Deci vom avea:

$$f_3(x) \geq f_3(\mathrm{e}) \Leftrightarrow \frac{\mathrm{e}^x}{x^{\mathrm{e}}} \geq 1 \Leftrightarrow e^x \geq x^{\mathrm{e}}.$$

Demonstraţia 4. Fie funcţia $f_4 : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f_4(x) = \mathrm{e}^x - x^{\mathrm{e}}$. A demonstra că $f_4(x) \geq 0$, pentru orice $x \in (0, \infty)$, adică $\mathrm{e}^x \geq x^{\mathrm{e}}$, prin logaritmare, revine la a demonstra – echivalent, că $x \geq \mathrm{e} \ln x$.

Pentru aceasta considerăm funcţia $\varphi : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = x - \mathrm{e} \ln x$ (v. şi [5]), pentru care avem

$$\varphi'(x) = 1 - \frac{\mathrm{e}}{x} = \frac{x - \mathrm{e}}{x}.$$

Rezultă că $x_0 = \mathrm{e}$ este punct de minim al funcţiei φ, deci $\varphi(x) \geq \varphi(e) = 0$, pentru orice $x \in (0, \infty)$.

În următorul „calup" de trei demonstraţii vom considera trei funcţii ce conţin expresiile e^x şi $\mathrm{e}x$.

Demonstraţia 5. Fie funcţia $f_5 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_5(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}x$, pentru care avem $f_5'(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}$.

Deci $x = 1$ este punct de minim al funcţiei f_5. Avem atunci:

$$f_5\left(\frac{x}{\mathrm{e}}\right) \geq f_5(1) \Leftrightarrow e^{\frac{x}{\mathrm{e}}} - x \geq 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{\frac{x}{\mathrm{e}}} \geq x \Leftrightarrow \mathrm{e}^x \geq x^{\mathrm{e}}.$$

Demonstraţia 6. Luăm acum funcţia $f_6 : (0, \infty) \to \mathbb{R}$,

$$f_6(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}x} = \frac{\mathrm{e}^{x-1}}{x}.$$

Cum avem, $f_6'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{e}-1}(x-1)}{x^2}$, rezultă că $x_0 = 1$ este punct de minim pentru f_6.

Vom avea deci:

$$f_6\left(\frac{x}{\mathrm{e}}\right) \geq f_6(1) \Leftrightarrow \frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{\mathrm{e}}}}{\mathrm{e} \cdot \dfrac{x}{\mathrm{e}}} \geq 1 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{\frac{x}{\mathrm{e}}} \geq x \Leftrightarrow \mathrm{e}^x \geq x^{\mathrm{e}}.$$

Demonstraţia 7. Să considerăm funcţia „răsturnată" celei din demonstraţia anterioară, $f_7 : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f_7(x) = \dfrac{\mathrm{e}x}{\mathrm{e}^x} = \dfrac{x}{\mathrm{e}^{x-1}}$. Avem:

$$f_7'(x) = \frac{\mathrm{e}^{x-1}(1-x)}{\mathrm{e}^{2(x-1)}} = \frac{1-x}{\mathrm{e}^{x-1}},$$

de unde deducem că $x_0 = 1$ este punct de maxim pentru funcţia f_7. Ca urmare, vom avea:

$$f_7\left(\frac{x}{\mathrm{e}}\right) \leq f_7(1) \Leftrightarrow \frac{\mathrm{e} \cdot \dfrac{x}{\mathrm{e}}}{\mathrm{e}^{\frac{x}{\mathrm{e}}}} \leq 1 \Leftrightarrow x \leq e^{\frac{x}{\mathrm{e}}} \Leftrightarrow x^{\mathrm{e}} \leq \mathrm{e}^x.$$

Următoarele trei demonstraţii utilizează funcţii ce conţin expresiile x şi $\ln x$.

Demonstraţia 8. Alegând funcţia $f_8 : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f_8(x) = x - \ln x$, avem:

$$f_8'(x) = \frac{x-1}{x}.$$

Rezultă că $x_0 = 1$ este punct de minim al funcţiei. În consecinţă avem:
$f_8\left(\frac{x}{\mathrm{e}}\right) \geq f_8(1) \Leftrightarrow \frac{x}{\mathrm{e}} - \ln\frac{x}{\mathrm{e}} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{x}{\mathrm{e}} - \ln x + 1 \geq 1 \Leftrightarrow x \geq \mathrm{e}\ln x \Leftrightarrow \mathrm{e}^x \geq x^{\mathrm{e}}$.

A se compara functia f_8, cu funcţia φ din Demonstraţia 4 .

Demonstraţia 9. Cu funcţia $f_9 : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f_9(x) = x\ln x$, avem $f_9'(x) = \ln x + 1$. Punctul $x_0 = \frac{1}{\mathrm{e}}$ este deci punct de minim . În particular, pentru $\frac{1}{x} > 0$, avem :

$f_9\left(\frac{1}{x}\right) \geq f_9\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right) \Leftrightarrow \frac{1}{x}\cdot ln\frac{1}{x} \geq -\frac{1}{\mathrm{e}} \Leftrightarrow -\frac{1}{x}\cdot\ln x \geq t-\frac{1}{\mathrm{e}} \Leftrightarrow e\cdot\ln x \leq x \Leftrightarrow x^{\mathrm{e}} \leq e^x.$

Demonstraţia 10. Luăm, de această dată, funcţia $f_{10} : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f_{10}(x) = \frac{\ln x}{x}$, pentru care avem

$$f_{10}^{'}(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}.$$

Punctul $x_0 = \mathrm{e}$ este punct de maxim al funcţiei. Prin urmare, vom avea:

$$f_{10}(x) \leq f_{10}(\mathrm{e}) \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} \leq \frac{1}{\mathrm{e}} \Leftrightarrow x \geq \mathrm{e}\ln x \Leftrightarrow \mathrm{e}^x \geq x^{\mathrm{e}}.$$

Prezentăm, în final, o demonstraţie in care se foloseşte o funcţie exponenţială.

Demonstraţia 11. Considerăm funcţia $f_{11} : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f_{11}(x) = x^{\frac{1}{x}}$. Pentru aceasta avem:

$$f_{11}'(x) = x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x),$$

de unde se observă că $x_0 = e$ este punct de maxim al funcţiei.

Vom avea deci:

$$f_{11}(\mathrm{e}) \geq f_{11}(x) \Leftrightarrow e^{\frac{1}{\mathrm{e}}} \geq x^{\frac{1}{x}} \Leftrightarrow \mathrm{e}^x > x^{\mathrm{e}}.$$

La acelaşi rezultat – privind monotonia funcţiei alese – se ajunge dacă observăm că $\ln f_{11}(x) = \frac{\ln x}{x} = f_{10}(x)$.

O altă consecinţa a inegalităţii lui *Steiner* este cea privitoare la compararea a două exponenţiale în care intervin două dintre constantele cele mai utilizate din matematică – e şi π.

6. Propoziţie (inegalitatea lui Euler). *Are loc inegalitatea*:

$$e^{\pi} > \pi^{e}. \tag{2}$$

Demonstraţia rezultă imediat din (1), luând $x = \pi$.

Mai multe demonstraţii ale inegalităţii (2) se pot consulta în [4], [10], [11], sau se obţin prin înlocuirea în oricare din demonstraţiile de mai sus a lui x prin π.

În monografia [16], pp. 252-253, se demonstrează că:

$$\begin{cases} 1 < a < b \le \mathrm{e} & \Rightarrow \quad a^b < b^a \\ \quad \mathrm{e} \le \alpha > \beta & \Rightarrow \quad \alpha^\beta > \beta^\alpha, \end{cases}$$

adică, *dacă a şi b (sau α şi β) nu sunt separate de numărul* e, *atunci, dintre expresiile a^b şi b^a (respectiv α^β şi β^α) este mai mare cea care are la baza numărul mai apropiat de* e.

Deci cu $\alpha = \mathrm{e}$ şi $\beta = \pi$, se regăseşte că $\mathrm{e}^\pi > \pi^\mathrm{e}$.

7. Observaţii

1) Valorile numerice pentru cele două puteri – confirmă inegalitatea demonstrată mai sus, anume $\mathrm{e}^\pi = 23,14069263\ldots$, $\pi^\mathrm{e} = 22,45915772\ldots$ (v. [6], [7]).

2) Cele două numere e^π şi π^e sunt foarte interesante – şi în sine – suscitând încă atenţia şi studiul matematicienilor. Pentru e^π, matematicianul *Alexandr Gelfond* a demonstrat în 1934 că este număr transcendent. Despre numărul π^e nu se cunoaşte încă, nici dacă este număr algebric sau număr transcendent, nici măcar dacă este număr raţional sau iraţional ([6], [7]).

O a treia consecinţă importantă a inegalităţii (1) o constituie demonstrarea faimoasei inegalităţi dintre mediile aritmetică , geometrică şi armonică. Vom oferi o demonstraţie pentru această inegalitate in forma sa ponderată.

Pentru aceasta, reamintim că, fiind date numerele reale strict pozitive $x_1, x_2, \ldots, x_n$ şi numerele numite ponderi $p_1, p_2, \ldots, p_n > 0$, cu $\sum\limits_{k=1}^{n} p_k = 1$, sunt cunoscute următoarele medii clasice ponderate:

$$A_n[x] := \sum_{k=1}^{n} p_k x_k \tag{3}$$

(media aritmetică ponderată a numerelor $x_1, x_2, \ldots, x_n$),

$$G_n[x] := \prod_{k=1}^{n} x_k^{p_k} \tag{4}$$

(media geometrică ponderată a numerelor $x_1, x_2, \ldots, x_n$),

$$H_n[x] := \frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{p_k}{x_k}} \tag{5}$$

(media armonică ponderată a numerelor $x_1, x_2, \ldots, x_n$).

Pentru $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = \dfrac{1}{n}$, se regăsesc mediile clasice.

8. Propoziţie (inegalitatea mediilor ponderate). *Pentru numerele reale pozitive $x_1, x_2, \ldots, x_n$ şi ponderile $p_1, p_2, \ldots, p_n > 0$, cu*

$$\sum_{k=1}^{n} p_k = 1,$$

au loc inegalităţile:

$$A_n[x] \geq G_n[x] \geq H_n[x], \tag{6}$$

cu egalitate dacă $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Demonstraţie. Folosind relaţia (1) cu substituţia $x \to \dfrac{x_1 \mathrm{e}}{G_n[x]}$, obţinem

$$e^{\frac{x_1 \mathrm{e}}{G_n[x]}} \geq \left(\frac{x_1 \mathrm{e}}{G_n[x]}\right)^{\mathrm{e}},$$

cu egalitate dacă şi numai dacă

$$\frac{x_1 \mathrm{e}}{G_n[x]} = \mathrm{e} \Leftrightarrow x_1 = G_n[x].$$

Prin ridicare la puterea p_1 în inegalitatea anterioară, obţinem :

$$\mathrm{e}^{\frac{p_1 x_1 \mathrm{e}}{G_n[x]}} \geq \left(\frac{x_1 \mathrm{e}}{G_n[x]}\right)^{p_1\ e}. \tag{7_1}$$

Analog avem:

$$\mathrm{e}^{\frac{p_2 x_2 \mathrm{e}}{G_n[x]}} \geq \left(\frac{x_2 \mathrm{e}}{G_n[x]}\right)^{p_2 \mathrm{e}}, \tag{7_2}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\mathrm{e}^{\frac{p_n x_n \mathrm{e}}{G_n[x]}} \geq \left(\frac{x_n \mathrm{e}}{G_n[x]}\right)^{p_n \mathrm{e}}. \tag{7_n}$$

Prin inmulţirea relaţiilor $(7_1) - (7_n)$, obţinem :

$$\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{e}}{G_n[x]} \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} p_k x_k} \geq \left(\frac{x_1^{p_1} \mathrm{e}^{p_1}}{G_n^{p_1}[x]} \cdot \frac{x_2^{p_2} \mathrm{e}^{p_2}}{G_n^{p_2}[x]} \cdot \ldots \cdot \frac{x_n^{p_1} \mathrm{e}^{p_n}}{G_n^{p_n}[x]}\right)^{\mathrm{e}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{e} A_n[x]}{G_n[x]}} \geq \left(\frac{(x_1^{p_1} x_2^{p_2} \ldots x_n^{p_n}) \cdot e^{p_1+p_2+\ldots+p_n}}{G_n^{p_1+p_2+\ldots+p_n}[x]}\right)^{\mathrm{e}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{e} A_n[x]}{G_n[x]}} \geq \left(\frac{G_n[x] \cdot \mathrm{e}}{G_n[x]}\right)^{\mathrm{e}} \Leftrightarrow \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{e} A_n[x]}{G_n[x]}} \geq \mathrm{e}^{\mathrm{e}} \Leftrightarrow A_n[x] \geq G_n[x].$$

Egalitatea se obţine dacă şi numai dacă $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$ $(= G_n[x])$.

Dacă in inegalitatea $A_n[x] G_n[x]$ se inlocuieşte x_k cu $\dfrac{1}{x_k}$, se obţine şi cealaltă inegalitatea din (6), $G_n[x] \geq H_n[x]$.

9. Corolar (inegalitatea mediilor).

Pentru numerele reale pozitive $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *are loc dubla inegalitate*:

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}}, \qquad (8)$$

cu egalitate dacă $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Demonstraţia rezultă din Propoziţia 8 prin particularizarea $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = \frac{1}{n}$.

Alte demonstraţii pentru inegalitatea mediilor se pot consulta în [1], [2], [8], [9], [12].

Bibliografie

[1] E. F. Beckenbach & R. Bellman, *Inequalities*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New-York, 1961.

[2] P. S. Bullen & D. S. Mitrinović & P. M. Vasić, *Means and Their Inequalities*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht/Boston, 1988.

[3] D. Heinrich, *100 Great Problems of Elementary Mathematics*, Dover Publ. Inc., New York, 1965, p. 359. (Originally published in German under the title *Triumph der Mathematik*, © 1958 by Physica-Verlag, Würzburg.)

[4] I. D. Hill, *Which is bigger –* e^π *or* π^e, The Mathematical Gazette, Vol. 70, No. 452, Jun. 1986 .

[5] E. Just, N. Schaumberger, *Two More Proofs of a Familiar Inequaliy*, The Two-Year College Mathematics Journal, Vol. 6 , No. 2 (May, 1975).

[6] François Le Lionnais (avec la collaboration de Jean Brette), *Les nombres remarquables*, Hermann, Paris, 1983.

[7] Eli Maor, e: *the story of a number*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1994 (traducerea romanească: e: *Povestea unui număr*, Fundaţia Theta, Bucuresti, 2006).

[8] D. Mărghidanu, M. Bencze, *New Proofs for AM - GM and Pondered AM-GM Inequalities*, in „OCTOGON Mathematical Magazine“, pp. 233-235, Vol. 12, nr. 1, April, 2004.

[9] D. Mărghidanu, *Două demonstraţii scurte pentru inegalitatea mediilor*, în „Creaţii matematice“, seria B, Anul II, pp. 20-21, nr. 2, 2007.

[10] D. Mărghidanu, *Şapte demonstraţii pentru inegalitatea* $\mathrm{e}^\pi > \pi^\mathrm{e}$, revista MINUS, no. 3, pp. 21-23, 2009.

[11] C. P. Niculescu, A. Vernescu, *Asupra poziţiei reciproce a graficelor exponenţialei şi logaritmului*, G. M. Seria A, 24 (2006), nr. 2, pp. 169-176.

[12] I. Niven, *Which is Larger*, e^π *or* π^e, The Two-Year College Mathematics Journal, Vol. 3, No. 2 (Autumn, 1972).

[13] N. Schaumberger, *The AM - GM Inequality via* $x^{\frac{1}{x}}$, The College Mathematics Journal, Vol. 20, No. 4 (Sept., 1989).
[14] J. Steiner, *Über das grösste Product der Theile oder Summanden jeder Zahl*, Journal für die reine und angewandte Mathematik, vierzigster Band, p. 208, Berlin, 1850, on line: http://gdz.sub.uni-goettingen.de/no_cache/en/dms/load/img/?IDDOC=268076 sau în „Gesammelte Werke“, Vol II, p. 423.
[15] A. Vernescu, A. Rădulescu-Banu, *Asupra şirului lui Traian Lalescu*, G. M., 94 (1989), nr.2, pp. 53-54.
[16] A. Vernescu, *Numărul* e *şi matematica exponenţialei*, Editura Universităţii din Bucureşti, Bucureşti, 2004.

O CLASĂ DE PATRULATERE CONVEXE

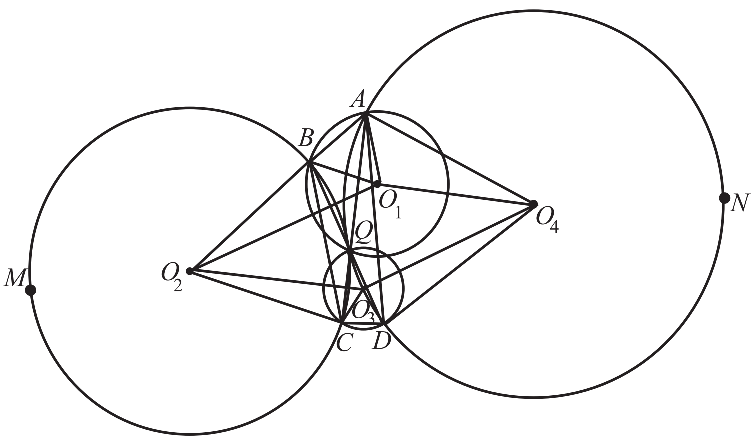
Ion Safta[1)]

Abstract. This article is dedicated to the convex quadrilaterals whose perimeters are equal to the sum of the circumradii of the four triangles determined by their inner diagonals.

Keywords: quadrilateral, diagonal, circumradius.
MSC : 51M04.

Fie $ABCD$ un patrulater convex care are perimetrul egal cu suma razelor cercurilor circumscrise triunghiurilor cu interioarele disjuncte determinate de diagonale cu laturile patrulaterului.

Fie $C_1(O_1, R_1)$, $C_2(O_2, R_2)$, $C_3(O_3, R_3)$, $C_4(O_4, R_4)$ cercurile circumscrise $\triangle AQB$, $\triangle BQC$, $\triangle CQD$, $\triangle AQD$, punctul Q fiind intersecţia diagonalelor patrulaterului.



[1)] Profesor, Şcoala nr. 10 „Marin Preda“, Piteşti