EXAMENE ŞI CONCURSURI

A 27-A OLIMPIADĂ BALCANICĂ DE MATEMATICĂ
Chişinău, Republica Moldova, 2 - 8 mai 2010

prezentare de Bogdan Enescu [1)] şi Mihail Bălună [2)]

A 27-a Olimpiadă Balcanică de Matematică s-a defăşurat cu participarea a 19 echipe: 10 din ţările membre (Albania, Bulgaria, Cipru, Grecia, FYR Macedonia, Moldova, Muntenegru, România, Serbia and Turcia) şi 9 echipe cu statut de invitat (Arabia Saudită, Azerbaijan, Franţa, Italia, Kazakhstan, Marea Britanie, Moldova 2, Tadjikistan şi Turkmenistan).

Echipa României a fost alcătuită din: *Tudor Pădurariu* (C.N. „Grigore Moisil", Oneşti), *Filip Chindea* (I.C.H.B.), *Radu Bumbăcea* (C.N. „Tudor Vianu", Bucureşti), *Ömer Cerrahoğlu* (C.N. „Vasile Lucaciu", Baia Mare), *Octav Drăgoi* (I.C.H.B.) şi *Ştefan Ivanovici* (I.C.H.B.) şi condusă de autorii acestei prezentări.

Toţi elevii români au luat medalii: *Radu Bumbăcea* şi *Octav Drăgoi* – aur (o a treia medalie de aur a fost ratată de puţin), iar ceilalţi – argint. În clasamentul neoficial pe naţiuni, România s-a plasat pe primul loc.

Iată şi problemele din concurs, pentru a căror rezolvare concurenţii au avut la dispoziţie $4\,{}^1\!/_2$ ore.

1. Fie a, b, c numere reale strict pozitive. Să se arate că:

$$\frac{a^2b\,(b-c)}{a+b}+\frac{b^2c\,(c-a)}{b+c}+\frac{c^2a\,(a-b)}{c+a}\geq 0.$$

Arabia Saudită

2. Fie ABC un triunghi ascuţitunghic cu ortocentrul H şi M mijlocul laturii AC. Fie C_1 proiecţia lui C pe AB şi H_1 simetricul lui H faţă de dreapta AB. Fie P, Q şi R proiecţiile punctului C_1 pe dreptele AH_1, AC şi, respectiv, BC. Fie M_1 un punct astfel încât centrul cercului circumscris triunghiului PQR este mijlocul segmentului $[MM_1]$.

Să se arate că M_1 aparţine segmentului $[BH_1]$.

Serbia

3. Printr-o *bandă de lăţime* ℓ se înţelege mulţimea punctelor din plan situate între sau pe două drepte paralele, aflate la distanţa ℓ una de alta.

Se consideră o mulţime finită S de n ($n \geq 3$) puncte distincte în plan, cu proprietatea că oricare 3 puncte din S pot fi acoperite cu o bandă de lăţime 1. Să se arate că mulţimea S poate fi acoperită cu o bandă de lăţime 2.

România – *Vasile Pop*

[1)] Profesor, Colegiul Naţional „B.P. Haşdeu", Buzău

[2)] Profesor, Colegiul Naţional „Mihai Viteazul", Bucureşti

4. Pentru fiecare număr întreg $n \geq 2$ notăm cu $f(n)$ suma numerelor întregi pozitive mai mici sau egale cu n şi care nu sunt relativ prime cu n.

Să se arate că $f(n+p) \neq f(n)$, pentru orice număr întreg n şi orice număr prim p.

Turcia

Prezentăm în continuare câteva rezolvări posibile ale problemelor din concurs, bazate, în mare parte, pe soluţiile propuse de elevii noştri.

1. Concurenţii români *T. Pădurariu, F. Chindea, R. Bumbăcea* şi *Şt. Ivanovici* au prezentat o soluţie bazată pe un calcul direct. Eliminând numitorii şi reducând termenii asemenea, inegalitatea este echivalentă cu:

$$a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3 \geq a^2bc^3 + b^2ca^3 + c^2ab^3. \tag{1}$$

Pentru a justifica (1), folosim inegalitatea mediilor. Astfel, avem:

$$a^3b^3 + b^3c^3 + b^3c^3 \geq 3ab^3c^2.$$

Sumând celelalte două inegalităţi analoage, obţinem concluzia dorită.

O. Drăgoi şi *Ö. Cerrahoğlu* au folosit inegalitatea rearanjamentelor, în diverse forme. Din start, putem presupune că $a \geq b \geq c$ sau $a \geq c \geq b$. De exemplu, *Ömer* a scris inegalitatea sub forma echivalentă:

$$\frac{ab}{c(a+b)} + \frac{bc}{a(b+c)} + \frac{ca}{b(a+c)} \geq \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a},$$

şi a folosit tripletele la fel ordonate (ab, ac, bc), $\left(\frac{1}{c(a+b)}, \frac{1}{a(b+c)}, \frac{1}{b(a+c)}\right)$ în cazul în care $a \geq b \geq c$, şi tripletele (ac, ab, bc), $\left(\frac{1}{b(a+c)}, \frac{1}{c(a+b)}, \frac{1}{a(b+c)}\right)$ în cazul $a \geq c \geq b$.

Iată şi soluţia oficială a juriului: împărţind prin abc, inegalitatea devine

$$\frac{a(b-c)}{c(a+b)} + \frac{b(c-a)}{a(b+c)} + \frac{c(a-b)}{b(c+a)} \geq 0.$$

Adunând câte o unitate la fiecare fracţie, obţinem:

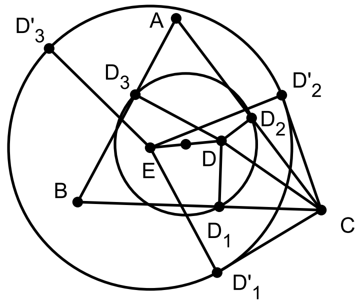
$$\frac{b(c+a)}{c(a+b)} + \frac{c(a+b)}{a(b+c)} + \frac{a(b+c)}{b(c+a)} \geq 3,$$

care rezultă imediat din inegalitatea mediilor:

$$\frac{b(c+a)}{c(a+b)} + \frac{c(a+b)}{a(b+c)} + \frac{a(b+c)}{b(c+a)} \geq 3\sqrt[3]{\frac{b(c+a)}{c(a+b)} \cdot \frac{c(a+b)}{a(b+c)} \cdot \frac{a(b+c)}{b(c+a)}} = 3.$$

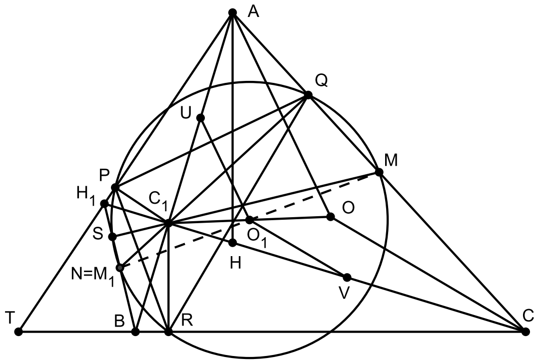
2. *R. Bumbăcea* începe prin a considera următorul fapt.

Lema 1. *Dacă punctele D, E sunt situate în interiorul unui triunghi ABC şi sunt conjugate izogonal în raport cu acesta (adică $\sphericalangle DAB \equiv \sphericalangle EAC$ şi $\sphericalangle DBA \equiv \sphericalangle EBC$ – situaţie în care are loc şi relaţia $\sphericalangle DCA \equiv \sphericalangle ECB$), iar punctul D se proiectează pe laturile triunghiului ABC în D_1, D_2, D_3, atunci* *centrul cercului circumscris triunghiului* $D_1D_2D_3$ *este mijlocul segmentului* $[DE]$.



Pentru a demonstra această afirmaţie, fie D_1', D_2', D_3' simetricele lui D faţă de laturile triunghiului. Obţinem $CD_1' = CD = CD_2'$, iar $\sphericalangle ECD_1' \equiv \sphericalangle ECB + \sphericalangle BCD_1' \equiv \sphericalangle ACD + \sphericalangle BCD \equiv \sphericalangle ACB$ şi analog $\sphericalangle ECD_2' \equiv \sphericalangle ACB$, de unde $\Delta ECD_1' \equiv \Delta ECD_2'$, deci $ED_1' = ED_2'$. În mod similar obţinem $ED_2' = ED_3'$, ceea ce arată că E este centrul cercului circumscris triunghiului $D_1'D_2'D_3'$. Considerând acum omotetia de centru D şi raport $\frac{1}{2}$, cercul (D_1', D_2', D_3'), cu centrul E, se transformă în cercul (D_1, D_2, D_3), cu centrul în mijlocul segmentului $[DE]$.

Revenind acum la rezolvarea problemei, fie T intersecţia dreptei AH_1 cu BC şi O centrul cercului circumscris triunghiului ABC. Observăm că putem aplica lema de mai sus punctelor C_1 şi O, conjugate izogonal în raport cu triunghiul ACT: dacă, de exemplu, $\sphericalangle B \geq \sphericalangle C$, atunci $\sphericalangle TCC_1 = 90° - \sphericalangle B = \sphericalangle ACO$ şi $\sphericalangle TAC_1 = \sphericalangle HAC_1 = 90° - \sphericalangle B = \sphericalangle CAO$. Astfel, centrul cercului circumscris triunghiului PQR este mijlocul O_1 al segmentului OC_1.



Aceasta arată că în patrulaterul OMC_1M_1 diagonalele se înjumătăţesc, deci el este paralelogram. Astfel $C_1M_1 \parallel OM$ şi $C_1M_1 = OM = \frac{1}{2}BH$, deci C_1M_1 este linie mijlocie în triunghiul BHH_1, ceea ce arată că M_1 se află pe BH_1 (este chiar mijlocul acestui segment).

O. Drăgoi şi *Ö. Cerrahoğlu* observă pe altă cale că O_1 este centrul cercului circumscris triunghiului PQR. Într-adevăr, dacă U este mijlocul segmentului $[AC_1]$, atunci UO_1 este mediatoarea segmentului $[PQ]$, deoarece, pe de o parte, $UP = \frac{1}{2}AC_1 = UQ$, iar pe de altă parte $UO_1 \parallel AO$ şi, folosind patrulaterul inscriptibil APC_1Q şi ipoteza, obţinem relaţiile $\sphericalangle AQP = \sphericalangle AC_1P = 90° - \sphericalangle PAC_1 = 90° - \sphericalangle HAC_1 = \sphericalangle ABC = \frac{1}{2}\sphericalangle AOC = 90° - \sphericalangle OAC$, de unde deducem $AO \perp PQ$.

De asemenea, dacă V este mijlocul segmentului $[CC_1]$, atunci VO_1 este mediatoarea segmentului $[QR]$, deoarece $VR = \frac{1}{2}CC_1 = VQ$, $VO_1 \parallel CO$ şi

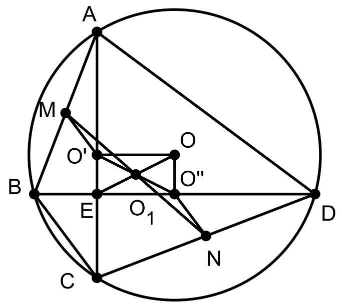
$CO \perp QR$ (folosind patrulaterul inscriptibil $ABRQ$ şi ipoteza obţinem relaţiile $\sphericalangle CQR = \sphericalangle ABC = \dfrac{1}{2}\sphericalangle AOC = 90^\circ - \sphericalangle ACO$).

Rezolvarea se termină acum observând că $BCAH_1$ este patrulater cu diagonalele perpendiculare, înscris într-un cerc cu centrul O, şi folosind următorul rezultat:

Lema 2. *Dacă $ABCD$ este un patrulater inscriptibil, cu diagonalele perpendiculare în E, înscris într-un cerc de centru O, atunci simetricul mijlocului M al laturii $[AB]$ faţă de mijlocul O_1 al segmentului $[OE]$ este mijlocul N al laturii $[CD]$.*

Demonstraţia acestei leme rezultă considerând mijloacele O', O'' ale coardelor $[AC]$ şi $[BD]$ şi observând că $MO' \parallel BC \parallel NO''$, $MO' = \dfrac{1}{2}BC = NO''$. Astfel, $MO'NO''$ este paralelogram, deci $[MN]$ şi $[O'O'']$ se înjumătăţesc.

Apoi, $OO'EO''$ este dreptunghi, deci şi $[OE]$ şi $[O'O'']$ se înjumătăţesc, ceea ce arată că mijloacele segmentelor $[MN]$ şi OE coincid.



Observaţie. Alte proprietăţi ale configuraţiei din problemă decurg din rezolvarea care urmează.

Şt. Ivanovici observă că, dacă $C_1S \perp BH_1$, $S \in BH_1$, atunci, folosind patrulatere inscriptibile, avem:

$\sphericalangle C_1PS \equiv \sphericalangle C_1H_1S$, $\quad \sphericalangle C_1PQ \equiv \sphericalangle C_1AQ$,

$\sphericalangle C_1RQ \equiv \sphericalangle C_1CQ$, $\quad \sphericalangle C_1RS \equiv \sphericalangle C_1BS$,

deci:

$$\sphericalangle C_1PS + \sphericalangle C_1PQ + \sphericalangle C_1RQ + \sphericalangle C_1RS = 180^\circ,$$

ceea ce arată că patrulaterul $PQRS$ este inscriptibil. Apoi:

$$\sphericalangle MC_1C \equiv \sphericalangle MCC_1 \equiv \sphericalangle ABH_1 \equiv \sphericalangle SC_1H_1,$$

deci punctele M, C_1, S sunt coliniare. În sfârşit:

$$\sphericalangle AMC_1 = 180^\circ - 2\sphericalangle MAC_1 = 180^\circ - 2\sphericalangle QPC_1$$

şi:

$$\sphericalangle QPC_1 \equiv \sphericalangle CAC_1 \equiv \sphericalangle BH_1C_1 \equiv \sphericalangle SPC_1,$$

deci $\sphericalangle AMC_1 = 180^\circ - \sphericalangle QPS$, adică M se află pe cercul (P, Q, R). Notând acum N a doua intersecţie a cercului P, Q, R cu BH_1, din $\sphericalangle MSN = 90^\circ$ rezultă că $[MN]$ este diametru, deci $N = M_1$.

3. Atât în soluţia oficială, cât şi în soluţiile găsite de concurenţii români, rezolvarea a folosit următorul rezultat:

Lemă. *Un triunghi poate fi acoperit cu o bandă de lăţime 1 dacă şi numai dacă măcar una dintre înălţimile triunghiului are lungimea cel mult 1.*

Demonstraţie. Una dintre implicaţii fiind evidentă, vom considera un triunghi ABC acoperit de o bandă de lăţime 1. Ducând prin punctele A, B, C perpendiculare pe dreptele care definesc banda, avem două situaţii:

• una dintre perpendiculare intersectează o latură a triunghiului ABC în interior (figura 1)

• o latură a triunghiului ABC conţine una dintre perpendiculare (figura 2)

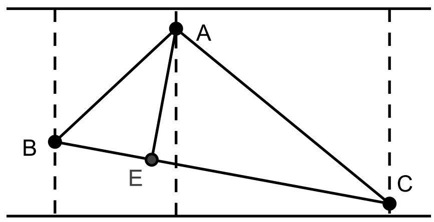


Figura 1

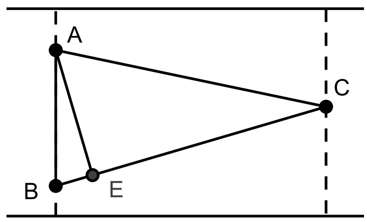


Figura 2

În ambele situaţii se observă că una dintre înălţimi (în figură, AE) are lungimea cel mult 1.

Continuarea soluţiei se face fie considerând punctele A, B aflate la distanţă maximă, fie alegând punctele A, B, C astfel încât aria triunghiului ABC să fie maximă.

În primul caz, pentru orice alt punct C din mulţime, distanţa de la C la AB este cel mult 1 (dacă ABC este triunghi nedegenerat, atunci aceasta este cea mai mică înălţime a triunghiului) deci mulţimea de puncte poate fi acoperită de o bandă de lăţime 2, determinată de două drepte paralele cu AB, situate la distanţa 1 de aceasta.

În al doilea caz, nu este greu de arătat că toate punctele mulţimii sunt incluse în triunghiul $A'B'C'$, determinat de paralelele duse prin A, B, C la laturile opuse (de altfel, o problemă clasică). Cum una din înălţimile lui ABC este cel mult 1, una din înălţimile lui $A'B'C'$ este cel mult 2, şi soluţia se termină ca în primul caz.

Observaţii

a) O soluţie care nu foloseşte lema se poate obţine considerând triunghiul de arie maximă ABC şi triunghiul $A'B'C'$ ca mai sus. Dreptele AA', BB', CC' sunt concurente în G, centrul comun de greutate al celor două triunghiuri, iar omotetia de centru G şi raţie -2 duce ABC în $A'B'C'$ şi banda de lăţime 1 care acoperă ABC într-o bandă de lăţime 2 care acoperă $A'B'C'$, aşadar întreaga mulţime de puncte.

b) Se pare că rezultatul poate fi îmbunătăţit, în sensul că putem înlocui constanta 2 cu $2\cos\frac{\pi}{5} \simeq 1.618...$ (mulţumiri lui *Ciprian Pop* şi lui *Dan Ismailescu* pentru sugestii). Pentru moment, autorii acestui articol nu cunosc o demonstraţie a acestui fapt şi nici un contraexemplu.

4. Toţi elevii români au „pornit” rezolvarea acestei probleme, dar ea nu a fost rezolvată complet de niciunul dintre partipanţii la competiţie.

Soluţia începe cu observaţia că, dacă $1 \le x \le n$ şi $(x,n) = 1$, atunci $(n-x,n) = 1$, deci, dacă $A = \{x \in \mathbb{N} \mid (x,n) = 1, x \le n\}$:

$$f(n) = (1+2+\ldots+n) - \textstyle\sum_{x\in A} x = \dfrac{n(n+1)}{2} - \dfrac{1}{2}\left(\displaystyle\sum_{x\in A} x + \sum_{x\in A} n - x\right) =$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} - \frac{1}{2}\left(n\ \mathrm{card}(A)\right) = \frac{n}{2}(n+1-\varphi(n)),$$

unde φ este indicatorul lui *Euler*, deci $f(n+p) = f(n)$ este echivalent cu:

$$(n+p)(n+p+1-\varphi(n+p)) = n(n+1-\varphi(n)). \tag{1}$$

Apoi, dacă $p \nmid n$, atunci $(n+p,n) = 1$ şi (1) implică $n+p \mid n+1-\varphi(n)$, ceea ce contrazice faptul că $1 \le n+1-\varphi(n) \le n$. Astfel $n = pm$, $m \in \mathbb{N}^*$ şi (1) devine, după calcule:

$$(m+1)(mp+p+1-\varphi(mp+p)) = m(mp+1-\varphi(mp)). \tag{2}$$

Cum $(m,m+1) = 1$, există $a \in \mathbb{Z}$ astfel încât $mp+1-\varphi(pm) = a(m+1)$ şi $mp+p+1-\varphi(p(m+1)) = am$. Din $p-1 \mid \varphi(px), \forall x \in \mathbb{N}$, prin scăderea celor două relaţii şi considerarea resturilor modulo $p-1$ rezultă $a \equiv -1$. Pe de altă parte, din $1 \le mp+1-\varphi(pm) \le mp$ reiese $1 \le a \le p-1$, deci $a = p-2$. Obţinem:

$$2m - \varphi(pm) = p-3, \tag{3}$$

$$2m + p + 1 - \varphi(p(m+1)) = 0. \tag{4}$$

Pasul următor este să arătăm că $(p,m) = 1$ şi $(p,m+1) = 1$. Astfel, pentru $m = p^a s$, $(s,p) = 1$, relaţia (3) conduce la $p^a(2s-(p-1)\varphi(s)) = p-3$, iar dacă $a \ge 1$, atunci $p \mid 3$, deci $p = 3$ şi $2p^a(s-\varphi(s)) = 0$, de unde $s = 1$, $m = 3^a$, iar (4) ar implica $3^a+2 = \varphi(3^a+1)$, imposibil. Apoi, dacă $p \mid m+1$, atunci, din (4), $p \mid 1$, contradicţie.

Astfel, $\varphi(pm) = (p-1)\varphi(m)$ şi $\varphi(p(m+1)) = (p-1)\varphi(m+1)$, iar (3) şi (4) devin:

$$\begin{cases} \varphi(m) = \dfrac{2(m+1)}{p-1} - 1, & (5) \\[2ex] \varphi(m+1) = \dfrac{2(m+1)}{p-1} + 1. & (6) \end{cases}$$

Ultimul pas constă în dovedirea faptului că sistemul (5) şi (6) nu are soluţii.

Observăm în primul rând că din $\varphi(m+1) < m+1$ rezultă $p \ge 5$. În plus, dacă $p = 5$ atunci obţinem succesiv $\varphi(m) = \dfrac{1}{2}(m-1)$, m este impar, $\varphi(m+1) \le \dfrac{1}{2}(m+1)$, ceea ce contrazice (6), deci $p \ge 7$. De asemenea, $m+1 \ge \dfrac{1}{2}(p-1)(\varphi(m)+1) \ge 9$ (cazul $\varphi(m) = 1$ este imposibil).

Observăm apoi că $\varphi(m+1)-\varphi(m)=2$, deci nu este posibil ca 4 să dividă atât $\varphi(m+1)$, cât şi $\varphi(m)$.

În cazul $4 \not| \, \varphi(m)$, m are cel mult un factor prim impar, deci $m=2^u q^v$, cu $u,v\in\mathbb{N}$, q prim impar şi nu este posibil ca $v=0$ (ar rezulta $u\geq 3$), deci $u\leq 1$. Astfel, deoarece $p\geq 7$, reiese contradicţia:

$$\frac{m+1}{3}-1\geq\frac{2(m+1)}{p-1}-1=\varphi(m)=(q-1)q^{v-1}\geq\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{q}\right)m\geq\frac{m}{3}.$$

În cazul $4\nmid\varphi(m+1)$, $m+1$ are cel mult un factor prim impar, deci $m+1=2^u q^v$, cu $u,v\in\mathbb{N}$, q prim impar şi nu este posibil ca $v=0$ (ar rezulta $u\geq 3$), deci $u\leq 1$. Astfel, ca mai sus:

$$\frac{2(m+1)}{p-1}+1=\varphi(m+1)\geq\frac{m+1}{3}. \tag{7}$$

Acum, dacă $p>7$, atunci $p\geq 11$ şi din (7) rezultă $m\leq 7$, contradicţie.

În sfârşit, dacă $p=7$, atunci, deoarece $\dfrac{1}{2}(p-1)$ divide $m+1$, rezultă $q=3$. Astfel, dacă $m+1=2\cdot 3^v$, atunci $\varphi(m+1)=\dfrac{1}{3}(m+1)$ – contradicţie cu (6), iar dacă $m+1=3^v$, atunci din $\varphi(m+1)=\dfrac{2}{3}(m+1)$ şi (6) deducem $m+1=3$ – contradicţie.