C.O:5102. Considerăm un triunghi ABC. Cercul de diametru BC intersectează laturile AC şi AB în punctele B_1 şi C_1. Tangentele în B_1 şi C_1 la cerc se intersectează în P. Să se arate că AP şi BC sunt perpendiculare.

Doru Buzac, Iaşi

Liceu

C.O:5103. Considerăm un triunghi ABC şi punctele $A' \in (BC)$, $B' \in (CA)$, $C' \in (AB)$ astfel încât cevienele AA', BB', CC' sunt concurente. Fie σ, σ_A, σ_B, σ_C, σ_O ariile triunghiurilor ABC, $AB'C'$, $BC'A'$, $CA'B'$, respectiv $A'B'C'$. Să se arate că $\sigma_O^2 \cdot \sigma = 4 \cdot \sigma_A \cdot \sigma_B \cdot \sigma_C$.

Silviu Boga, Iaşi

C.O:5104. Fie $k \geq 3$ un număr natural şi considerăm numerele reale pozitive $a_1, a_2, ..., a_k$. Să se arate că:

$$\left(\sqrt{a_1 + \sqrt{a_2 + ... + \sqrt{a_k}}}\right)^{2^k - 1} \geq \prod_{i=1}^{k} (2^i - 1) a_i.$$

Paul Georgescu şi *Gabriel Popa*, Iaşi

C.O:5105. a) Să se arate că orice multiplu nenul al numărului 111 are cel puţin trei cifre nenule.

b) Să se arate că pentru orice $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$, există un multiplu al lui 111, cu n cifre, prim cu 10, cu exact trei cifre nenule.

Gheorghe Iurea, Iaşi

C.O:5106. Fie S un punct pe diametrul BC al unui semicerc. Perpendiculara în S pe BC intersectează semicercul în A, iar cercurile înscrise în triunghiurile curbilinii ABS şi ACS sunt tangente la BC în M, respectiv, N. Să se arate că măsura unghiului $\sphericalangle MAN$ nu depinde de poziţia punctului S pe BC.

Cătălin Calistru, Iaşi

PROBLEMS FOR COMPETITIONS AND OLYMPIADS

Junior Level

C.O:5099. Let $A(2,3)$ be a point in an xOy-plane. Find all isosceles trapezoids $OABC$ with all vertices of integer coordinates, $AB \parallel OC$ and $AB = 2OC$.

Mihaela Cianga, Iaşi

C.O:5100. Show that the number $\overline{100\underbrace{11\ldots1}_{n \text{ times } 1}3}$ is not prime, for all positive integers n.

Radu Sava, Iaşi

C.O:5101. For any positive real numbers x and y, let m_{xy} be an arbitrary element of the set $\left\{\dfrac{2xy}{x+y}, \sqrt{xy}, \dfrac{x+y}{2}, \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2}}\right\}$. Prove that :

$$\sqrt{a^2+b^2-m_{ab}^2}+\sqrt{b^2+c^2-m_{bc}^2}+\sqrt{c^2+a^2-m_{ca}^2}+m_{ab}+m_{bc}+m_{ca}\geq$$
$$\geq 2(a+b+c),$$

for any $a, b, c > 0$, regardless of the choice of m_{ab}, m_{bc}, m_{ca}.

Claudiu Ştefan Popa, Iaşi

C.O:5102. Consider a triangle ABC. The circle of diameter BC intersects the sides AC and AB at points B_1 and C_1. The tangents at B_1 and at C_1 to the circle meet at point P. Show that lines AP and BC are perpendicular.

Doru Buzac, Iaşi

Senior Level

C.O:5103. Consider a triangle ABC and let $A' \in (BC)$, $B' \in (CA)$, $C' \in (AB)$ such that lines AA', BB', CC' are concurrent. Let σ, σ_A, σ_B, σ_C, σ_O be the areas of triangles ABC, $AB'C'$, $BC'A'$, $CA'B'$, $A'B'C'$, respectively. Prove that $\sigma_O^2 \cdot \sigma = 4 \cdot \sigma_A \cdot \sigma_B \cdot \sigma_C$.

Silviu Boga, Iaşi

C.O:5104. Let $k \geq 3$ be an integer and let $a_1, a_2, ..., a_k$ be positive real numbers. Prove that:

$$\left(\sqrt{a_1+\sqrt{a_2+...+\sqrt{a_k}}}\right)^{2^k-1} \geq \prod_{i=1}^{k}(2^i-1)a_i.$$

Paul Georgescu and *Gabriel Popa*, Iaşi

C.O:5105. a) Show that any multiple of the number 111 has at least 3 digits not equal to 0.

b) Show that for any integer n, $n \geq 3$, there exists a multiple of 111, with n digits, from which exactly three non-zero, and coprime with 10.

Gheorghe Iurea, Iaşi

C.O:5106. Let S be a point on the diameter BC of a semicircle. The perpendicular from S on BC meets the semicircle in A. The circles inscribed in the curved triangles ABS and ACS are tangent to BC at M and N, repectively. Show that the measure of $\sphericalangle MAN$ is constant with respect to S.

Cătălin Calistru, Iaşi