• *Carmen Pop*: profesor, C. N. „Al. Papiu-Ilarian“, Târgu-Mureş
• problemele au fost selectate de conf. univ. dr. *Vasile Pop*.

CONCURSUL INTERJUDEŢEN DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ „GRIGORE MOISIL“

Ediţia a VI-a, Urziceni, 29-31 ianuarie 2009

Clasa VII-a

1. Să se rezolve in mulţimea numerelor naturale ecuaţia:

$$xy + yz + zx = 2(x + y + z) + 8.$$

Nicolae Papacu, Slobozia

2. Arătaţi că dacă $x, y \in \mathbb{R}^+$ şi $5x^3 + 2x^2y = 2y^3 + 5xy^2$, atunci

$$\frac{3x + 4y}{4x + 3y} \in \mathbb{Z}.$$

G.M.

3. În triunghiul ABC punctele D şi E aparţin segmentului BC, astfel încât $AD \perp BC$ şi AE este bisectoarea unghiului $\sphericalangle BAC$. Dreapta care uneşte punctul D cu mijlocul segmentului AE intersectează pe AC în N, iar unghiul $\sphericalangle ABC$ este de 3 ori mai mare decat unghiul $\sphericalangle ACB$.

Arătaţi că $DE \cdot DC = AN \cdot AC$.

Constantin Păunescu, Urziceni

4. Fie triunghiul ABC şi punctul $D \in (BC)$. Bisectoarele unghiurilor ADB şi ADC intersectează laturile AB respectiv AC în punctele E respectiv F.

a) Să se arate că $\dfrac{EB}{EA} + \dfrac{FC}{FA} = \dfrac{BC}{AD}$.

b) Dacă D este piciorul înălţimii din vârful A şi $\dfrac{EB}{EA} \cdot \dfrac{FC}{FA} = 1$, să se arate că triunghiul ABC este dreptunghic.

Nicolae Papacu, Slobozia

Clasa a VIII-a

1. În tetraedrul $ABCD$, tridreptunghic în D, unghiul $\sphericalangle BAD$ şi unghiul $\sphericalangle ACD$ au aceeaşi măsură, iar H este punctul de intersecţie al înălţimilor CE şi BF ale $\triangle ABC$.

Arătaţi că $EH \cdot EC + FH \cdot FB = BD \cdot DC$.

Constantin Păunescu, Urziceni

2. Să se determine toate intervalele $I = [a, b]$, $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$, care au proprietatea: pentru orice $x, y \in I$, rezultă că $x \cdot y \in I$. . *Nicolae Papacu*, Slobozia

3. Fie cubul $ABCDA'B'C'D'$, cu muchia $AB = 2a$, iar M, N şi P mijloacele muchiilor AB, BC, respectiv DD'. Să se calculeze perimetrul şi aria secţiunii formate de planul (MNP) în cubul dat.

G.M.

4. Să se rezolve ecuaţia $1 + [x] = [px]$, unde p este un număr natural.

Nicolae Papacu, Slobozia

Clasa a IX-a[1)]

1. Demonstraţi că pentru orice număr natural $n \geq 2$, are loc inegalitatea:

$$\frac{1}{n+1}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2n-1}\right) > \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{2n}\right).$$

2. Aflaţi al optlea termen al şirului 1440, 1716, 1848,... ai cărui termeni sunt produsul termenilor corespunzători (primul cu primul, al doilea cu al doilea, etc.) ai anumitor două progresii aritmetice.

3. Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Demonstraţi că mulţimea

$$\left\{n, n+1, n+2, \ldots, n^3+n^2+n+1, n^3+n^2+n+2\right\}$$

a) conţine cel puţin un pătrat perfect;

b) conţine puterea a patra a unui număr natural.

4. Fie $ABCD$ un pentagon şi M, N, P, Q punctele de intersecţie ale segmentelor ce unesc mijloacele laturilor opuse în patrulaterele $BCDE$, $CDEA$, $EABD$, $ABCE$, respectiv.

Demonstraţi că MNPQ este paralelogram dacă şi numai dacă $ABCD$ este paralelogram.

Clasa a X-a[1)]

1. Notăm cu X mulţimea numerelor naturale mai mari sau egale cu 8 şi fie $f : X \to X$ o funcţie cu proprietatea că $f(x+y) = f(xy)$, oricare ar fi numerele naturale $x \geq 4$ şi $y \geq 4$. Dacă $f(8) = 9$, calculaţi $f(9)$.

2. Fie $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ astfel încât

$$|z_1| = |z_2| = \left|\frac{z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1}{z_1 + z_2 + z_3}\right| = 1.$$

Daţi un exemplu de astfel de triplete cu $z_3 = 0$.

Demonstraţi că dacă $z_3 \neq 0$, atunci $|z_3| = 1$.

3. Fie $f, g, h \in \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ funcţii periodice de perioade 7, 19, respectiv 31. Demonstraţi că dacă funcţia $f + g + h$ este constantă, atunci funcţiile f, g şi h sunt constante.

(Fie $T \geq 1$ un număr natural. Spunem că o funcţie $y : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ este periodică de perioadă T dacă $y(x + T) = y(x)$, oricare ar fi $x \in \mathbb{Z}$).

[1)] Subiectele au fost elaborate de *Cristinel Mortici*, Târgovişte

[1)] Subiectele au fost elaborate de *Cristinel Mortici*, Târgovişte

4. Rezolvaţi ecuaţiile:
a) $\log_{0,5}\left(1 + tg^2 x\right) \cdot \log_{0,5}\left(1 + ctg^2 x\right) = 1$.
b) $\log_{1,5}\left(1 + sin^2 x\right) \cdot \log_{1,5}\left(1 + cos^2 x\right) = 1$.

Clasa a XI-a[1)]

1. Demonstraţi că şirul $x_{n+1} = x_n - x_n^2 + x_n^3 - x_n^4$, cu $x_0 \in (0,1)$ este convergent şi apoi calculaţi limita şirului $y_n = nx_n$.

2. Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ o matrice cu proprietatea că:

$$A^3 + A = \frac{1}{4} I_2 + \frac{3}{A}^{2} + \frac{1}{4} A^4.$$

Demonstraţi că există o matrice $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ astfel încât $B^2 = A$.

3. a) Fie $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$, $(c_n)_{n\geq 1}$ şiruri de numere reale şi funcţiile $f_n : (0,1) \to \mathbb{R}$ definite pentru orice $x \in (0,1)$ şi $n \in \mathbb{N}*$ prin $f_n(x) = a_n x^2 + b_n x + c_n$.

Arătaţi că dacă pentru orice $x \in (0,1)$ avem $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, atunci există un şir de numere reale $(w_n)_{n\geq 1}$ convergent la zero, pentru care $|f_n(x)| \leq w_n$, oricare ar fi $x \in (0,1)$ şi $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Daţi exemplu de funcţii $g_n : (0,1) \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) = 0$, oricare ar fi $x \in (0,1)$, pentru care nu există niciun şir de numere reale $(v_n)_{n\geq 1}$ convergent la zero, care să satisfacă relaţia $|g_n(x)| \leq v_n$, oricare ar fi $x \in (0,1)$ şi $n \in \mathbb{N}^*$.

4. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ cu $\det A = d \neq 0$. Demonstraţi că pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$, avem:
a) $\det\left((\ldots(A^*)^*\ldots)^*\right)^* = d^{(n-1)^k}$ (k semne „$*$“);
b) $\left((\ldots(A^*)^*\ldots)^*\right)^* = d^{\frac{(n-1)^k+(-1)^{k-1}}{n}} \cdot A^{(-1)^k}$ (k semne „$*$“) (X^* este adjuncta matricei X).

Clasa a XII-a[1)]

1. Calculaţi

$$\lim_{a\to\infty} \int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^{2010})}.$$

2. Fie mulţimea:

$$\mathcal{F} = \{f : [0,1] \to [0,1] \mid f \text{ continuă },\ f(0) = 0,\ f(1) = 1\}$$

şi aplicaţia $T : \mathcal{F} \to (0,1)$ definită prin $T(f) = \int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$, oricare ar fi $f \in \mathcal{F}$.

Demonstraţi că:

[1)]Subiectele au fost elaborate de *Cristinel Mortici*, Târgovişte
[1)]Subiectele au fost elaborate de *Cristinel Mortici*, Târgovişte

a) T este surjectivă;

b) T nu este injectivă.

3. Determinaţi toate funcţiile $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ derivabile, cu derivata continuă, astfel încât oricare ar fi $x \in [0, \infty)$:

$$f(x) = \sqrt{2010 + \int_0^x \left(f^2(t) + f'^2(t)\right) \mathrm{d}t}\,.$$

4. Pe o mulţime nevidă S se defineşte o lege de compoziţie „ $*$ “ astfel încât $x * x = x$ şi $(x * y) * z = (y * z) * x$, oricare ar fi $x, y, z \in S$. Arătaţi că legea „ $*$ “ este comutativă.

Lista premianţilor

Clasa a VII-a

Premiul I: *Catană Adrian* (C. N. „Ienăchiţă Văcărescu“, Târgovişte);

Premiul II: *Negoescu Valentin* (C. N. „Ienăchiţă Văcărescu“, Târgovişte);

Premiul III: *Stere Maria* (Şc. gen. „Sf. Vineri“, Ploieşti);

Menţiuni: *Dumitru Floriana* (Lic. de Artă „Ionel Perlea“, Slobozia); *Minciu Oana* (Lic. de Artă „Ionel Perlea“, Slobozia); *Radu Alexandra* (C. N. „Mihai Viteazul“, Slobozia); *Topuzaru Cristina* (Şc. gen. „Ion Heliade Radulescu“, Urziceni); *Galateanu Ovidiu* (C. N. „Vladimir Streinu“ Găeşti); *Mănescu Ilinca Maria* (Şc. gen. „Ion Heliade Radulescu“, Urziceni); *Badarau Diana* (Şc. gen. „Mihai Eminescu“, Brăila); *Mihăilă Cosmin* (C. N. „Vladimir Streinu“, Găeşti); *Iamandi Bianca* (Şc. gen. „Mihai Eminescu“, Brăila); *Nastasiu Dragoş* (Şc. gen. nr. 1, Urziceni); *Stanciu Monica* (Şc. gen. nr. 1, Urziceni).

Clasa a VIII-a

Premiul I: *Apostoaie Andrei* (C. N. „Al. I. Cuza“, Focşani);

Premiul II: *Turcu Denis* (C. N. „Nicolae Bălcescu“, Brăila);

Premiul III: *Voicilă Alexandru* (C. N. „Vladimir Streinu“, Găeşti);

Menţiuni: *Jianu David* (Şc. gen. „Andrei Mureşan“, Ploieşti); *Tapluk Aurelia* (Şc. gen. „Ion Heliade Rădulescu“, Urziceni); *Adamescu Diana* (Şc. gen. 7 Feteşti); *Kevorchian Andreea* (C. N. „Fraţii Buzeşti“, Craiova); *Marchitan Mihai* (C. N. „Al. I. Cuza“, Focşani).

Clasa a IX-a

Premiul I: *Mâindrila Claudiu* (C. N. „Constantin Carabella“ Târgovişte);

Premiul II: *Baltariga Anca* (Lic. teoretic, Dăbuleni Dolj);

Premiul III: *Drajneanu Diana* (C. N. „Mihai Viteazul“, Slobozia);

Menţiuni: *Nedelcu Theodor Daniel* (C. N. „I. L. Caragiale“, Ploieşti); *Frăţilă Andrei* (C. N. „Fraţii Buzeşti“, Craiova); *Areanu Andrei Felix*(Lic.

teoretic „Carol I“, Feteşti); *Veigang-Radulescu Vlad* (C. N. „I. L. Caragiale“, Ploieşti); *Pojar Mihai Corneliu* (Lic. teoretic „Grigore Moisil“, Urziceni); *Crosman Vlad* (Lic. teoretic „Mihai Eminescu“, Călăraşi); *Tănase Adrian Nicolae* (Lic. teoretic „Grigore Moisil“, Urziceni).

Clasa a X-a

Premiul I: *Stancioiu Răzvan* (C. N. „Fraţii Buzeşti“, Craiova);

Premiul II: *Antonache Emanuel* (C. N. „Constantin Carabella“ Târgovişte);

Premiul III: *Baltariga Alexandru* (Lic. teoretic, Dăbuleni Dolj);

Menţiuni: *Buriceanu Cătălina* (Lic. teoretic „Grigore Moisil“, Urziceni); *Geambaşu George* (C. N. „Mihai Viteazul“, Slobozia); *Dragomir Mihaela* (Lic. teoretic „Grigore Moisil“, Urziceni); *Pătraşcu Viorica* (C. N. „Gh. M. Murgoci“, Brăila); *Teodorescu Ana Maria* (C. N. „Fraţii Buzeşti“, Craiova); *Oprea Elena* (Lic. teoretic „Grigore Moisil“, Urziceni); *Panait Oana* (Lic. teoretic „Grigore Moisil“, Urziceni).

Clasa a XI-a

Premiul I: *Ionescu Vlad* (C. N. „Vladimir Streinu“ Găeşti);

Premiul II: *Drăgănescu Alina* (Lic. „Grigore Moisil“, Timişoara);

Premiul III: *Manoiu Andrei* (Lic. „Ştefan Odobleja“ Craiova);

Menţiuni: *Matei Adrian* (C. N. „I. L. Caragiale“, Ploieşti); *Bencescu Laura* (C. N. „Tudor Vianu“, Bucuresti); *De Sabata Carla* (Lic. „Grigore Moisil“, Timişoara); *Mincu Răzvan* (Lic. de Artă „Ionel Perlea“, Slobozia); *Drăgan Raluca* (Lic. de Artă „Ionel Perlea“, Slobozia); *Petcu Ion* (C. N. „Fraţii Buzeşti“, Craiova); *Bosinceanu Andrada* (Lic. teoretic „Carol I“, Feteşti).

Clasa a XII-a

Premiul I: *De Sabata Giuliano* (Lic. „Grigore Moisil“, Timişoara);

Premiul II: *Florea Răzvan* (C.N. „Mihai Viteazul“, Slobozia);

Premiul III: *Mincu Diana* (Lic. de Artă „Ionel Perlea“, Slobozia);

Menţiuni: *Mihai Alexandra* (C.N. „Ienăchiţa Văcărescu“ Târgovişte); *Andreeana Andrei* (C. N. „Fraţii Buzeşti“ Craiova); *Cristache Valentina* (Lic. teoretic „Grigore Moisil“ Urziceni); *Popescu Bogdan* (C. N. „Vladimir Streinu“ Găeşti); *Amza Cătălin* (C. N. „Fraţii Buzeşti“ Craiova); *Cristache Radu* (Lic. teoretic „Grigore Moisil“ Urziceni); *Sezciuc Radu* (C.N. „Mihai Viteazul“, Slobozia); *Udrea Cosmin* (Lic. teoretic „Grigore Moisil“ Urziceni).