EXAMENE ŞI CONCURSURI

A IV-A EDIŢIE A CONCURSULUI FACULTĂŢII DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ A UNIVERSITĂŢII „OVIDIUS“ DIN CONSTANŢA

prezentare de LAURENŢIU HOMENTCOVSHI [1)] şi DIANA SAVIN[1)]

Cea de a patra ediţie a concursului de matematică iniţiat de Facultatea de Matematică şi Informatică a Universităţii Ovidius din Constanţa în colaborare cu Inspectoratul Şcolar Judeţean s-a desfăşurat în zilele de 28 februarie şi 1 martie 2008. Au fost invitaţi să participe elevi ai claselor a XI-a şi a XII-a cu rezultate bune la olimpiada locală de matematică din judeţul Constanţa, împreună cu studenţii cu rezultate bune la examene din anii I şi II ai facultăţii. În prima zi a avut loc proba de concurs, iar în cea de a doua prezentarea rezolvărilor problemelor însoţite de comentarii asupra unor soluţii diferite de cele ale autorilor, precum şi anunţarea rezultatelor şi premierea. În urma selecţiei efectuate de către Inspectoratul Şcolar Judeţean, au fost invitaţi să participe un număr de 51 de elevi, dintre care 25 la clasa a XI-a şi 26 la clasa a XII-a. Lor li s-au alăturat studenţii Facultăţii de Matematică. În continuare prezentăm problemele propuse spre rezolvare elevilor, împreună cu soluţiile lor. Mulţumim domnului profesor *Nelu Chichirim* de la Colegiul Naţional „Mircea cel Bătrân“ pentru sprijinul dat la selecţia problemelor de concurs.

Enunţuri

Clasa a XI-a

1. Fie şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ de numere reale nenule, cu proprietatea că:

$$|x_{k+1}\cdot x_s - x_{s+1}\cdot x_k| \leq \frac{|x_k\cdot x_s|}{|k-s|}, \forall k,s\in\mathbb{N}^*, k\neq s.$$

Să se arate că $(x_n)_{n\geq 1}$ este progresie geometrică.

Nelu Chichirim, Constanţa

2. Fie A o matrice de ordin n cu elemente reale, având proprietatea că

$$A^{2007} + A^{2008} + A^{2009} = O_n.$$

Notăm $B = A^2 + A + I_n$. Să se demonstreze că matricea $I_n - AB$ este inversabilă.

Gazeta Matematică

[1)]Facultatea de Matematică şi Informatică, Universitatea Ovidius din Constanţa
[1)]Facultatea de Matematică şi Informatică, Universitatea Ovidius din Constanţa

3. Fie $f:(0,\infty)\to R$ strict monotonă şi $g:(0,\infty)\to(0,\infty)$ continuă, astfel încât

$$[g(x)f(x)-g(y)f(y)][g(y)f(x)-g(x)f(y)]\leq 0,$$

pentru orice $x,y\in(0,\infty)$. Să se arate că f este continuă pe $(0,\infty)$.

Gheorghe Andrei, Constanţa

4. Fie $A\in M_2(\mathbf{C})$ şi $m,n\in\mathbb{N}^*$ numere prime între ele, de parităţi diferite, astfel încât

$$\det(A^m+I_2)=\det(A^m-I_2)$$

şi

$$\det(A^n+I_2)=\det(A^n-I_2).$$

Să se arate că $A^2=O_2$.

Nelu Chichirim, Constanţa

Clasa a XII-a

1. a) Fie $(G,\circ)$ un grup finit de ordin impar şi $a,b,c\in G$ cu proprietatea că $a\circ b=c$ şi $c\circ b=a$. Demonstraţi că $a=c$.

b) Găsiţi 3 elemente a,b,c din $(\mathbb{Z}_4,+)$ pentru care $a+b=c, c+b=a$ şi $a\neq c$.

Prelucrare, Gazeta Matematică

2. Vom spune că funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ are proprietatea (P) dacă este continuă şi $f(x)=\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^{x\sqrt{2}} f(t)\mathrm{d}t,\quad \forall\, x\neq 0.$

a) Determinaţi funcţiile polinomiale care au proprietatea (P).

b) Dacă f are proprietatea (P), demonstraţi că f este de două ori derivabilă pe $\mathbb{R}^*$, f'' este continuă pe $\mathbb{R}^*$ şi $f(0)=0$.

c) Determinaţi toate funcţiile f cu proprietatea (P) pentru care există şi sunt finite limitele: $\lim\limits_{x\to\infty} f''(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f''(x)$.

Nelu Chichirim, Constanţa

3. Pentru un inel A notăm $Z(A)=\{x\in A: xy=yx, \forall y\in A\}$ şi $I(A)=\left\{x\in A: x^2=x\right\}$.

a) Notăm $G=Z(A)\cap G(A)$. Pe G definim legea $x*y=x+y-2xy$, $\forall\, x,y\in G$.

Demonstraţi că $(G,*)$ este grup abelian.

b) Arătaţi că dacă $Z(A)\cap G(A)$ este o mulţime finită, atunci numărul elementelor acestei mulţimi este de forma 2^k, $k\in\mathbb{N}$.

Marcel Ţena , Bucureşti, Gazeta Matematică

4. Fie $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ continuă, cu proprietatea că există:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=0$$

şi există şi este finită:

$$\lim_{x\searrow 0} xf(x).$$

Definim şirul

$$a_n = \frac{1}{n}\int\limits_{\frac{1}{n}}^{n} f(x)\mathrm{d}x, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*.$$

Demonstraţi că $(a_n)_{n\geq 1}$ este convergent la 0.

Nelu Chichirim, Constanţa

Soluţii

Clasa a XI-a

1. a) Din ipoteză avem:

$$\left|\frac{x_{k+1}\cdot x_s - x_{s+1}\cdot x_k}{x_k\cdot x_s}\right| \leq \frac{1}{|k-s|}, \forall k \neq s$$

deci:

$$\left|\frac{x_{k+1}}{x_k} - \frac{x_{s+1}}{x_s}\right| \leq \frac{1}{|k-s|}, \forall k \neq s.$$

Fie $y_n = \dfrac{x_{n+1}}{x_n}$, $\forall\, n \geq 1$. Obţinem:

$$|y_k - y_s| \leq \frac{1}{|k-s|}, \quad \forall\, k \neq s,$$

de unde:

$$|y_k - y_1| \leq \frac{1}{|k-1|}, \quad \forall\, k \geq 2.$$

Rezultă că:

$$\lim_{k\to\infty} y_k = y_1.$$

Pentru s fixat, obţinem la fel:

$$\lim_{k\to\infty} y_k = y_s.$$

Rezultă $y_s = y_1$, $\forall\, s \in \mathbb{N}^*$, deci $(x_n)_{n\geq 1}$ este progresie geometrică.

2. Cum $B^2 = A^2 + A + I_n$, rezultă $AB = BA$.

Deoarece:

$$A^{2007} + A^{2008} + A^{2009} = O_n$$

vom avea:

$$A^{2007}\cdot B = O_n.$$

Rezultă:

$$(AB)^{2007} = A^{2007}\cdot B^{2007} = A^{2007}\cdot B\cdot B^{2006} = O_n.$$

Obţinem:

$$I_n - (AB)^{2007} = I_n,$$

deci

$$(I_n - AB)\left(I_n + AB + \cdots + (AB)^{2006}\right) = I_n.$$

Rezulă că $I_n - AB$ este inversabilă.

3. Deoarece f este strict monotonă, rezultă că f admite limite laterale finite în orice $x_0 \in (0, \infty)$.

Fie $y = x_0$. Obţinem:

$$[f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)][g(x_0)f(x) - g(x)f(x_0)] \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Trecând la limită când $x \to x_0$, $x < x_0$, rezultă:

$$g^2(x_0)[f(x_0 - 0) - f(x_0)]^2 \leq 0 \Rightarrow f(x_0 - 0) = f(x_0).$$

Analog, vom avea $f(x_0 + 0) = f(x_0)$. Deci f este continuă în x_0. Cum x_0 este arbitrar, rezultă că f este continuă pe $(0, \infty)$.

4. Să observăm că, dacă $X \in M_2(C)$, cu proprietatea că $\det(X + I_2) = \det(X - I_2)$, rezultă că $\mathrm{Tr}(X) = 0$. Ţinând cont de această observaţie şi de ipoteza problemei, rezultă că $\mathrm{Tr}(A^m) = 0$ şi $\mathrm{Tr}(A^n) = 0$. Din relaţia *Hamilton-Cayley* obţinem $A^{2m} = -d^m \cdot I_2$ şi $A^{2n} = -d^n \cdot I_2$, unde $d = \det A$.

Fără a micşora generalitatea, presupunem m par şi n impar.

Vom arăta că $d = 0$.

Presupunem $d \neq 0$. Rezultă că A este inversabilă.

Cum $(m, n) = 1$, rezultă că există $k, s \in \mathbb{Z}$ astfel încât $mk + ns = 1$.

Obţinem:

$$A^{2mk} = (-1)^k d^{mk} \cdot I_2,\ A^{2ns} = (-1)^s d^{ns} \cdot I_2$$

şi:

$$A^2 = (-1)^{k+s} d \cdot I_2.$$

Rezultă că $A^{2m} = d^m \cdot I_2$ şi apoi $d^m \cdot I_2 = -d^m \cdot I_2$. Deci $d = 0$ şi obţinem imediat că $A^2 = O_2$.

Clasa a XII-a

1. a) Se ştie că $|G| = 2k+1$, $k \in N$. Cum $a \circ b = c$ şi $c \circ b = a$, rezultă că $(c \circ b) \circ b = c$. Din această egalitate şi din faptul că $(G, \circ)$ este grup, rezultă $b \circ b = e$. Ţinând cont că $|G| = 2k+1$ obţinem imediat că $b = e$. Revenind în $a \circ b = c$, rezultă că $a = c$.

b) Se observă că (spre exemplu) $a = \widehat{0}$, $b = \widehat{2}$, $c = \widehat{2}$ îndeplinesc condiţiile cerute.

2. a) Fie $f(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$, $x \in \mathbb{R}$.

Înlocuind în (P) se obţine:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{\sqrt{2}^{k+1}}{k+1} x^k, \ \forall x \in \mathbb{R}^*,$$

de unde

$$a_k = a_k \frac{\sqrt{2}^{k+1}}{k+1}, \quad k = \overline{0, n}.$$

Rezultă că fie $a_k = 0$, fie $\sqrt{2}^{k+1} = k+1$. Folosind faptul că $2^n \geq n^2$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$ (sau alte argumente) se demonstrează uşor că singurele soluţii întregi ale ecuaţiei mai sus menţionate sunt $k = 1$, respectiv $k = 3$.

Obţinem că $a_k = 0$, $\forall\, k \notin \{1, 3\}$, de unde $f(x) = a_1 x + a_3 x^3$, $a_1, a_3 \in \mathbb{R}$.

b) Cum f este continuă rezultă că funcţia $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = \int\limits_0^x f(t)\mathrm{d}t$, $F(0) = 0$, este o primitivă a lui f.

Obţinem că funcţia f, $f(x) = \dfrac{F(x\sqrt{2})}{x}$ este derivabilă pe $\mathbb{R}^*$ şi

$$f'(x) = \frac{f(x\sqrt{2}) \cdot x\sqrt{2} - F(x\sqrt{2})}{x^2}, \quad \forall x \neq 0.$$

Rezultă că f' este derivabilă pe $\mathbb{R}^*$ şi f'' este continuă pe $\mathbb{R}^*$.

Vom avea:

$$\lim_{x \mapsto 0} \frac{F(x\sqrt{2})}{x} = \lim_{x \mapsto 0} f(x) \Leftrightarrow \lim_{x \mapsto 0} \frac{F(x\sqrt{2})}{x\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} = f(0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow F^{'}(0) \cdot \sqrt{2} = f(0) \Leftrightarrow f(0) \cdot \sqrt{2} = f(0) \Leftrightarrow f(0) = 0.$$

c) Utilizând funcţia de la punctul anterior şi derivând de două ori, obţinem:

$$f(x) = \frac{F(x\sqrt{2})}{x}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow xf(x) = F(x\sqrt{2}), \quad \forall x \in \mathbb{R}^* \Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow xf''(x) + 2f'(x) = 2f'(x\sqrt{2}), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^* \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f''(x) = \frac{2}{x}\left[f'(x\sqrt{2}) - f'(x)\right], \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^*.$$

Fie $x > 0$ fixat. Aplicând Teorema lui *Lagrange* şi ţinând cont de egalitatea anterioară, se obţine:

$$\exists\, c_1 \in (x, x\sqrt{2}) \text{ a.î. } f''(x) = \frac{2}{x} f''(c_1)\cdot x(\sqrt{2}-1) \Leftrightarrow f''(x) = 2f''(c_1)\cdot(\sqrt{2}-1),$$

$$\exists\, c_2 \in (c_1, c_1\sqrt{2}) \text{ a.î. } f''(c_1) = \frac{2}{c_1}\cdot\left[f'(c_1\sqrt{2}) - f'(c_1)\right] = 2(\sqrt{2}-1)f''(c_2),$$

ş.a.m.d,

$$f''(x) = \left[2(\sqrt{2}-1)\right]^n \cdot f''(c_n),\ x < c_1 < c_2 < ... < c_n.$$

Rezultă că există:

$$\lim_{n\mapsto\infty} c_n = l,\ \text{cu } l \in (0,\infty) \text{ sau } l = \infty.$$

Dacă $l \in (0,\infty)$ vom avea $f''(c_n) \longrightarrow f''(l) \in \mathbb{R}$.

Dacă $l = \infty$ rezultă

$$f''(c_n) \longrightarrow \lim_{x\longrightarrow\infty} f''(x) \in \mathbb{R}.$$

Deci, şirul $(f''(c_n))_{n\geq 1}$ este convergent. Avem atunci:

$$f''(x) = \lim_{n\mapsto\infty} 2^n\cdot(\sqrt{2}-1)^n\cdot f''(c_n) = 0.$$

Obţinem $f''(x) = 0$, $\forall\, x > 0$, de unde $f(x) = ax + c$, cu $a, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

Analog rezultă $f''(x) = 0$, $\forall\, x < 0$, de unde $f(x) = bx + d$, cu $b, d \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$.

Tinând cont de faptul că f este continuă în 0, rezultă $c = d = 0$, deci

$$f(x) = \begin{cases} ax, & x \leq 0 \\ bx, & x > 0. \end{cases}$$

3. a) Pentru orice $x, y \in G$ vom avea

$$(x*y)^2 = (x+y-2xy)^2 = x^2+y^2+4x^2y^2+2xy-4x^2y-4xy^2 = x+y-2xy = x*y.$$

Deci $x * y \in G$.

Se demostrează rapid că legea „$*$" este asociativă pe G, comutativă pe G şi că 0 este element neutru pentru „$*$" pe G.

În plus:

$$x * x = x + x - 2x^2 = 0$$

Deci, orice $x \in G$ este simetrizabil în raport cu „$*$" şi simetricul său este $x' = x$.

Obţinem că $(G, *)$ este grup abelian.

b) Presupunem că $|G|$ nu este o putere a lui 2 şi notăm cu k cea mai mare putere a lui 2 cu proprietatea că 2^k divide $|G|$. Rezultă că

$$|G| = 2^k(2l+1),\quad l \in \mathbb{N}^*.$$

Fie p un divizor natural prim al lui $2l+1$. Conform Teoremei lui *Cauchy*, rezultă că exista $x \in G$ astfel incât $ord_G(x) = p$.

Tinând cont de faptul că $x * x = e$ şi p este impar rezultă imediat că $x = e$ şi $p = 1$. Am ajuns la contradicţie cu faptul că p este prim. Deci, presupunerea facută este falsă. Rezultă că $|G|$ este o putere a lui 2.

4. a) Se aplică Criteriul *Cesàro-Stolz* pentru şirurile $(x_n)_{n\geq 1}$, $(y_n)_{n\geq 1}$, unde

$$x_n = \int_{\frac{1}{n}}^{n} f(x)\mathrm{d}x, \quad y_n = n.$$

Avem:

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \int_{\frac{1}{n+1}}^{n+1} f(x)\mathrm{d}x - \int_{\frac{1}{n}}^{n} f(x)\mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} f(x)\mathrm{d}x + \int_{n}^{n+1} f(x)\mathrm{d}x.$$

Notăm: $I_n = \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} f(x)\mathrm{d}x$, $J_n = \int_{n}^{n+1} f(x)\mathrm{d}x$.

Aplicând Teorema de medie, există $c_n \in [n, n+1]$ astfel încât $J_n = f(c_n)$. Deci $c_n \to \infty$ şi aplicând ipoteza rezultă $J_n \to 0$.

Deoarece:

$$\lim_{x\to 0}(xf(x)) \in \mathbb{R}$$

rezultă că există $\delta > 0, M > 0$ astfel încât $|xf(x)| \leq M, \forall x \in (0, \delta)$.

Există $n_0 \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\dfrac{1}{n_0} < \delta$.

Dacă $n \geq n_0$, rezultă că $\left[\dfrac{1}{n+1}; \dfrac{1}{n}\right] \subset (0, \delta)$.

Obtinem:

$$|I_n| \leq \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} |f(x)|\,\mathrm{d}x \leq \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \frac{M}{x}\mathrm{d}x = M \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \to 0.$$

Aplicând Criteriul majorării rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$, deci:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = 0.$$

Conform Criterilui *Cesàro-Stolz*, rezultă că există $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Problemele propuse spre rezolvare elevilor la această ediţie a concursului au fost cu un grad mai scăzut de dificultate faţă de cele propuse în ediţiile anterioare, acest lucru ducând la obţinerea unor punctaje mai bune de către participanţi.

În continuare evidenţiem elevii premiaţi la acest concurs.

Clasa a XI-a

Premiul I: *Velicu Andrei*, C. N. „Mircea cel Bătrân“, Constanţa
Premiul II: *Cocalea Andrei*, C. N. „Mircea cel Bătrân“, Constanţa
Premiul III: *Oncioiu Anamaria Raluca*, C. N. „Mircea cel Bătrân“, Constanţa
Premiul Societăţii de Ştiinte Matematice, filiala Constanţa: *Hudişteanu Anamaria*
Premiul Facultăţii de Matematică şi Informatică: *Sav Adrian*

Clasa a XII-a

Premiul I: *Burtea Cosmin*, C. N. „Mircea cel Bătrân“, Constanţa
Premiul II: *Goga Steliana*, C. N. „Mircea cel Bătrân“, Constanţa
Premiul III: *Drăgan Monica*, C. N. „Mircea cel Bătrân“, Constanţa
Premiul Societăţii de Ştiinte Matematice, filiala Constanţa: *Capalnasiu Adela*
Premiul Facultăţii de Matematică şi Informatică: *Necşulescu Maria*
Menţiuni: *Zechiu Marian*, *Mutu Rareş*, *Cocu Ioana*

PROBLEME

REZOLVAREA PROBLEMELOR DIN GAZETA MATEMATICĂ Nr.6/2009

PROBLEME PENTRU GIMNAZIU

Clasa a V-a

E:13839. *Determinaţi numerele de forma* $\overline{ab}$ *care împărţite la* $a \cdot b$ *dau restul* b.

Ştefan Marica, Drobeta Turnu-Severin

Soluţie. Avem $\overline{ab} = abx + b$, cu condiţia evidentă $b < ab$. Din $\overline{ab} = abx + b$ obţinem $10a + b = abx + b$ sau $10 = bx$. Din ultima relaţie deducem următoarele situaţii:

1) $b = 1; x = 10$ şi numerele sunt: 21, 31, 41, 51, 61, 71, 81, 91;
2) $b = 2; x = 5$ şi numerele sunt: 22, 32, 42, 52, 62, 72, 82, 92;
3) $b = 5; x = 2$ şi numerele sunt:25, 35, 45, 55, 65, 75, 85, 95.

E:13840. *Aflaţi numerele naturale* a, b, c, *cu* $a < b \leq c$, *astfel încât*:

$$2^a + 2^b + 2^4 \cdot 5^b = 2009.$$

Emil Vlad, Zimnicea, Teleorman

Soluţie. Dacă numerele $2^a; 2^b; 2^4 \cdot 5^b$ sunt numere pare, atunci egalitatea este imposibilă. Înseamnă că unul dintre ele trebuie să fie impar. Cum $b > 0$, reiese că 2^a=1. În acest caz obţinem $a = 0$ şi relaţia din enunţ devine $2^b + 2^4 \cdot 5^b = 2008$ sau