EXAMENE ŞI CONCURSURI

A 50-A OLIMPIADĂ INTERNAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

10-22 iulie 2009, Bremen, Germania

prezentare de C. ALEXANDRESCU[1)], M. BĂLUNĂ[2)], R. GOLOGAN[3)] şi D. SCHWARZ[4)]

A cincizecea Olimpiadă Internaţională de Matematică a avut loc în Germania, în perioada 10-22 iulie. Au participat reprezentanţi a 104 ţări, elevii şi profesorii beneficiind de excelentele condiţii oferite de Universitatea Jacobs din Bremen.

Echipa României a fost formată din următorii elevi: *Marius Tiba* – clasa a X-a, *Mădălina Persu* – clasa a XII-a, *Andrei Deneanu* – clasa a XII-a, *Francisc Bozgan* – clasa a XII-a, toţi de la Liceul Internaţional de Informatică, Bucureşti, *Tudor Pădurariu* – clasa a X-a, Colegiul Naţional „Grigore Moisil", Oneşti şi *Ömer Cerrahoğlu* – clasa a VII-a, Colegiul Naţional „Vasile Lucaciu", Baia Mare. Echipa a fost însoţită de autorii acestei prezentări.

Prezentăm în cele ce urmează problemele din concurs, cu soluţii şi comentarii.

Prima zi

Problema 1. *Fie n, $k \geq 2$ numere întregi şi $a_1, a_2, \ldots, a_k$ elemente distincte ale mulţimii $\{1, 2, \ldots, n\}$ astfel încât n divide $a_i(a_{i+1} - 1)$, pentru $i = 1, \ldots, k - 1$. Arătaţi că n nu divide $a_k(a_1 - 1)$.*

Australia

Soluţie. Foarte mulţi concurenţi, inclusiv patru români, au mers pe calea următoarei soluţii „automate". Să presupunem că n divide $a_k(a_1 - 1)$ şi să definim $a_{k+1} = a_1$. Fie $b_i =$ c.m.m.d.c. (n, a_i) şi $d_i =$ c.m.m.d.c. $(n, a_i - 1)$; avem c.m.m.d.c. $(b_i, d_i) = 1$. Rezultă $b_i d_i \mid n$ şi $n \mid b_i d_{i+1}$, deoarece, din ipoteză, n este c.m.m.d.c.$(n, a_i(a_{i+1} - 1))$. Aceasta înseamnă că:

$$\prod_{i=1}^{k} b_i d_i \mid n^k \text{ şi } n^k \mid \prod_{i=1}^{k} b_i d_{i+1} = \prod_{i=1}^{k} b_i d_i,$$

de unde reiese că în toate relaţiile de divizibilitate are loc egalitatea, deci $b_i = b$, $d_i = d$, $n = bd$ şi c.m.m.d.c. $(b, d) = 1$.

Apoi, $a_i = bx_i$, $a_i - 1 = dy_i$, deci $bx_i = a_i \leq n = bd$, de unde $x_i \leq d$. Relaţiile $bx_i = dy_i + 1$ şi $bx_j = dy_j + 1$ duc la $b(x_i - x_j) = d(y_i - y_j)$. Cum

[1)]Profesor, inspector general la I.Ş.M. Bucureşti

[2)]Profesor, C. N. „Mihai Viteazu", Bucureşti

[3)]Profesor univ. dr., Universitatea „Politehnica", Bucureşti

[4)]Profesor, Liceul Internaţional de Informatică, Bucureşti c.m.m.d.c. $(b, d) = 1$, înseamnă că $d \mid (x_i - x_j)$, ceea ce dă $x_i = x_j$, adică $a_i = a_j$, absurd.

Altă soluţie. Din $n \mid x(y-1)$ şi $n \mid y(z-1)$ reiese $n \mid x(z-1)$, deoarece $x(z-1) = x(y-1) + xy(z-1) - zx(y-1)$. Prin folosirea repetată a ipotezei obţinem $n \mid a_1(a_k - 1)$, ceea ce, împreună cu $n \mid a_k(a_1 - 1)$ duce la $n \mid a_1 - a_k$, imposibil pentru $a_1 \neq a_k$.

Remarcă (*Dan Schwarz*). Putem dovedi următorul rezultat:

Cel mai mare k pentru care există $a_i \in \{1, \ldots, N\}$ distincte, astfel încât $n \mid a_i(a_{i+1} - 1)$ pentru $i = 1, \ldots, k-1$ şi, de asemenea, $n \mid a_k(a_1 - 1)$ este dat de $\kappa(N, n) = \left[\dfrac{N}{n}\right]$.

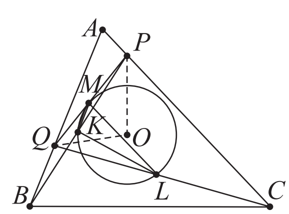
Într-adevăr, din $n \mid a_1(a_2 - 1)$ obţinem $a_1 \equiv a_1a_2 \pmod{n}$, iar din $n \mid a_2(a_3 - 1)$ obţinem $a_2 \equiv a_2a_3 \pmod{n}$, deci $a_1a_2 \equiv a_1a_2a_3 \pmod{n}$. Prin inducţie reiese imediat $a_1 \equiv \prod_{j=1}^{k} a_j \pmod{n}$ şi similar pentru orice alt a_i, deci toţi a_i sunt congruenţi. Aceasta se poate întâmpla doar dacă $1+(k-1)n \leq N$, adică $k \leq \dfrac{N-1}{n} + 1$, i.e. $k \leq \left[\dfrac{N}{n}\right]$. Un model în cazul $k = \left[\dfrac{N}{n}\right] = \kappa(N, n)$ este dat chiar de numerele $a_i = 1 + (i-1)n$ pentru $i = 1, \ldots, \kappa(N, n)$.

Cum în problema dată $\kappa(n, n) = 1 < 2 = k$, concluzia rezultă imediat.

Elevii români s-au descurcat bine la această problemă, doar unul dintre ei având o mică scăpare.

Problema 2. *Fie ABC un triunghi, în care cercul circumscris $\mathcal{C}$ are centrul O. Punctele P şi Q se află pe laturile CA, respectiv AB, în interiorul acestora. Fie K, L şi M mijloacele segmentelor BP, CQ, respectiv PQ şi fie $\mathcal{K}$ cercul circumscris triunghiului KLM. Arătaţi că, dacă dreapta PQ este tangentă cercului $\mathcal{K}$, atunci $OP = OQ$.*

Rusia



Soluţie. Cerinţa este ca punctele P, Q să fie egal depărtate de centrul cercului $\mathcal{C}$, ceea ce este echivalent cu faptul că punctele au puteri egale faţă de $\mathcal{C}$, adică

$$AP \cdot PC = AQ \cdot QB. \qquad (*)$$

Pentru a dovedi aceasta, începem prin a observa că $\sphericalangle MKL \equiv \sphericalangle LMP$ (din condiţia de tangenţă) şi $\sphericalangle LMP \equiv \sphericalangle QPA$ (deoarece ML este linie mijlocie în triunghiul CPQ, deci $LM \parallel PC$). Astfel, $\sphericalangle MKL \equiv \sphericalangle APQ$; analog reiese $\sphericalangle MLK \equiv \sphericalangle AQP$.

Aceasta arată că $\Delta APQ \sim \Delta MKL$, de unde $\dfrac{MK}{AP} = \dfrac{ML}{AQ}$; folosind relaţiile $PC = 2ML, BQ = 2MK$ obţinem $(*)$.

Această problemă a fost complet rezolvată de toţi elevii români, soluţiile lor urmând, în esenţă, ideile de mai sus.

Problema 3. *Se ştie că* $s_1, s_2, s_3, \ldots$ *este un şir strict crescător de numere naturale nenule, astfel încât subşirurile*

$$s_{s_1}, s_{s_2}, s_{s_3}, \ldots \quad \text{şi} \quad s_{s_1+1}, s_{s_2+1}, s_{s_3+1}, \ldots$$

sunt, amândouă, progresii aritmetice. Arătaţi că şi $s_1, s_2, s_3, \ldots$ *este o progresie aritmetică.*

S.U.A

Soluţie. Fie $s_{s_i} = a + ir$, $s_{s_i+1} = b + is$ pentru orice i. Din $s_{s_i+1} > s_{s_i}$ reiese $(b-a) + i(s-r) > 0$, pentru orice i, deci $s \geq r$, (1). De asemenea, $s_{s_{i+1}} \geq s_{s_i+1}$, deci $(a - b + r) + i(r - s) \geq 0$, pentru orice i, de unde $r \geq s$, (2). Din (1) şi (2) rezultă $r = s$, adică subşirurile sunt progresii aritmetice cu aceeaşi raţie r.

Apoi:

$$r = s_{s_{i+1}} - s_{s_i} = \sum_{k=1}^{s_{i+1}-s_i} (s_{s_i+k} - s_{s_i+k-1}) \geq \sum_{k=1}^{s_{i+1}-s_i} 1 = s_{i+1} - s_i,$$

deci şirul $(d_i)_{i\geq 1}$ dat de $1 \leq d_i = s_{i+1} - s_i \leq r$ este mărginit.

Fie $m = \min d_i$ şi $M = \max d_i$. Luăm i cu $d_i = m$ şi j astfel încât $d_j = M$; atunci:

$$r = s_{s_{i+1}} - s_{s_i} = \sum_{k=1}^{s_{i+1}-s_i} (s_{s_i+k} - s_{s_i+k-1}) \leq d_i M = mM$$

$$r = s_{s_{j+1}} - s_{s_j} = \sum_{k=1}^{s_{j+1}-s_j} \left(s_{s_j+k} - s_{s_j+k-1}\right) \geq d_j m = Mm.$$

Cele două relaţii dau $r = mM$; în plus inegalităţile sunt egalităţi, adică $s_{s_i+1} - s_{s_i} = M$ şi $s_{s_j+1} - s_{s_j} = m$. Pe de altă parte, $s_{s_\ell+1} - s_{s_\ell} = b - a$ pentru orice ℓ, de unde $M = m = b - a$, ceea ce arată că şirul iniţial este o progresie aritmetică cu raţia $m = \sqrt{r}$.

Dintre elevii români doar *M. Persu* a primit punctajul maxim, ceilalţi primind 1 sau 2 puncte.

A doua zi

Problema 4. *Fie* ABC *un triunghi cu* $AB = AC$*. Bisectoarele unghiurilor* $\sphericalangle CAB$ *şi* $\sphericalangle ABC$ *taie laturile* BC*, respectiv* CA *în punctele* D*, respectiv* E*. Fie* K *centrul cercului înscris în triunghiul* ADC*. Se ştie că* $m(\sphericalangle BEK) = 45°$*. Determinaţi toate valorile posibile pentru* $\mathrm{m}(\sphericalangle CAB)$.

Belgia

Soluţie. Arătăm că valorile cerute sunt $60°$ şi $90°$.

O primă rezolvare este cea dată în concurs de *M. Persu.* Ea se obţine considerând centrul I al cercului înscris în ΔABC, ducând $IJ \perp AC, J \in (AC)$

şi observând că ΔICD şi ΔICJ sunt simetrice faţă de IC, deci JK este bisectoarea $\sphericalangle IJC$, de unde $m(\sphericalangle IJK) = 45^\circ$. Astfel, deoarece $m(\sphericalangle BEK) = 45^\circ$, punctele E, J sunt de aceeaşi parte a dreptei KI şi $\sphericalangle IJK \equiv \sphericalangle BEK$, rezultă că I, J, K, E sunt conciclice. De aici reiese $m(\sphericalangle EKI) = m(\sphericalangle EJI) = 90^\circ$, cu excepţia cazului când $E = J$, situaţie în care $\sphericalangle EJI$ nu este definit.

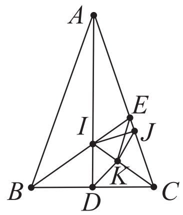


Fig. 1

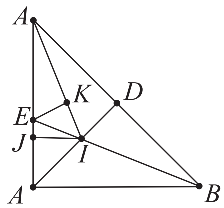


Fig. 2

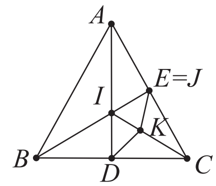


Fig. 3

Cazul 1: $J \neq E$ (fig. 1 sau 2). În acest caz $m(\sphericalangle EIK) = 45^\circ = \frac{1}{2}(m(\sphericalangle B) + m(\sphericalangle C))$, deci $m(\sphericalangle A) = 90^\circ$.

Cazul 2: $J = E$ (fig. 3). În acest caz $BE \perp AC$, deci $AB = BC = AC$ şi $m(\sphericalangle A) = 60^\circ$.

Reciproc, în cazul în care $m(\sphericalangle A) = 60^\circ$ (fig. 3), obţinem relaţia $m(\sphericalangle BEK) = m(\sphericalangle IDK) = 45^\circ$, iar dacă $m(\sphericalangle A) = 90^\circ$ (fig. 2), atunci $m(\sphericalangle CJK) = m(\sphericalangle CDK) = 45^\circ$ şi $m(\sphericalangle EIK) = m(\sphericalangle ACB) = 45^\circ$, deci patrulaterul $EKIJ$ este inscriptibil, $m(\sphericalangle EKI) = 90^\circ$ şi $m(\sphericalangle BEK) = 45^\circ$.

Alte rezolvări (notând $m(\sphericalangle ABC) = 2x$, $m(\sphericalangle BEK) = a$) se pot obţine, de exemplu, folosind teorema sinusurilor în ΔCEK şi în ΔCDK:

$$\frac{CE}{CK} = \frac{\sin(a+2x)}{\sin(\pi - a - 3x)}, \quad \frac{CD}{CK} = \frac{\sin(\pi - x - \frac{\pi}{4})}{\sin\frac{\pi}{4}}.$$

Înmulţind aceste relaţii cu:

$$\frac{CD}{AC} = \cos 2x, \quad \text{respectiv } \frac{CE}{AE} = \frac{BC}{AB} = 2\cos 2x \Leftrightarrow \frac{CE}{AC} = \frac{2\cos 2x}{1 + 2\cos 2x},$$

obţinem ecuaţia:

$$\frac{\sin(a+2x)\cos 2x}{\sin(a+3x)} = \frac{\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{\sin\frac{\pi}{4}} \cdot \frac{2\cos 2x}{1 + 2\cos 2x}.$$

Cum $\cos 2x \neq 0$ (deoarece $0 < 2x < \frac{\pi}{2}$), ecuaţia se scrie echivalent $\cos\left(a + 2x - \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(a + 4x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin(a+2x) + \sin(a+4x) + \sin a)$, ceea ce este totuna cu $\cos(a+2x) - \cos(a+4x) = \sin a$. Pentru $a = \frac{\pi}{4}$, ultima ecuaţie devine:

$$(\cos 2x - \sin 2x)(2\cos 2x - 1) = 0,$$

cu soluţiile $2x = \dfrac{\pi}{4}$ şi $2x = \dfrac{\pi}{3}$.

Reciproc, pentru $2x = \dfrac{\pi}{4}$ ecuaţia se scrie $\cos\left(a + \dfrac{\pi}{4}\right) = 0$, iar pentru $2x = \dfrac{\pi}{3}$ ecuaţia este $\cos a = \sin a$, iar în ambele cazuri obţinem $a = \dfrac{\pi}{4}$.

La această problemă, elevii români, cu excepţia lui *O. Cerrahoglu* (cel mai tânăr component al echipei noastre !), au „pierdut“ destul de multe puncte, deoarece au „neglijat“ să răspundă complet la întrebarea pusă: din punct de vedere logic, determinarea valorilor posibile ale unghiului $\sphericalangle A$ nu înseamnă doar eliminarea unor valori imposibile, ci şi demonstrarea faptului că există situaţii pentru care valorile obţinute pot fi atinse.

Problema 5. *Determinaţi funcţiile* $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ *care au proprietatea că, pentru orice* $a, b \in \mathbb{N}^*$*, numerele* a, $f(b)$ *şi* $f(b + f(a) - 1)$ *pot fi lungimile laturilor unui triunghi nedegenerat.*

Franţa

Soluţie. Arătăm că singura funcţie cu această proprietate este funcţia identică (este evident că, dacă f este funcţia identică şi $a, b \in \mathbb{N}^*$, atunci numerele a, $f(b) = b$ şi $f(b + f(a) - 1) = a + b - 1$ pot fi lungimile laturilor unui triunghi nedegenerat, deoarece $|a - b| < a + b - 1 < a + b$).

Pasul 1: $f(1) = 1$. Pentru $a = 1$ obţinem $1 + f(b) > f(b + f(1) - 1)$, deci $f(b) \geq f(b + c)$, $\forall\, b \in \mathbb{N}^*$, unde $c = f(1) - 1 \geq 0$. În cazul $c > 0$ ar rezulta că funcţia este mărginită, în contradicţie cu $a < f(1) + f(f(a))$, $\forall a \in \mathbb{N}^*$; astfel $c = 0$.

Pasul 2: $f(f(a)) = a$, $\forall\, a \in \mathbb{N}^*$; în particular, f este bijectivă. Aceasta reiese imediat din faptul că numerele a, $f(1) = 1$ şi $f(1 + f(a) - 1) = f(f(a))$ sunt lungimile laturilor unui triunghi şi sunt întregi.

Pasul 3: dacă $f(2) = p$, atunci $f((p-1)n + 1) = n + 1$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ şi $p = 2$.

Prima abordare (folosită de aproape toţi elevii români). Raţionăm inductiv după n. Pentru $n = 0$ şi $n = 1$, prima relaţie este evidentă. Să presupunem acum că ea este adevărată pentru $0, 1, \ldots, n$ şi să o dovedim pentru $n + 1$, cu $n \geq 1$. Fie $a = 2$, $b = (p - 1)n + 1$. Atunci:

$$f((p-1)n + 1 + p - 1) < 2 + f((p-1)n + 1) = n + 3,$$

deci $f((p-1)(n+1) + 1) \in \{1, 2, \ldots, n + 2\}$. Deoarece f este injectivă şi $f((p-1)k + 1) = k + 1$, $\forall k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, rămâne ca singură posibilitate $f((p-1)(n+1) + 1) = n + 2$.

Apoi $p > 1$, iar pentru $p > 2$ mulţimea $A = \{(p-1)n + 1 \mid n \in \mathbb{N}\}$ ar fi diferită de $\mathbb{N}^*$ pe când mulţimea $f(A)$ este $\mathbb{N}^*$, ceea ce ar contrazice bijectivitatea lui f.

A doua abordare (*T. Pădurariu*). Pentru $a = 2$ şi orice $b \in \mathbb{N}^*$ obţinem $2 + f(b) > f(b+p-1)$, deci $f(b+p-1) \leq f(b)+1$, $(**)$, de unde, inductiv, $f(b+n(p-1)) \leq f(b)+n, \forall n \in \mathbb{N}$. Notând $m = \max\{f(1), f(2), \ldots, f(p-1)\}$ obţinem:

$$f(x) \leq m + \frac{x}{p-1}, \forall x \in \mathbb{N}^*.$$

Aceasta arată că, pentru orice $a \in \mathbb{N}^*$:

$$f(2) + f(2 + f(a) - 1) \leq p + m + \frac{1 + f(a)}{p-1} \leq p + \frac{mp}{p-1} + \frac{a}{(p-1)^2}$$

şi, dacă presupunem $p > 2$, obţinem $f(2) + f(2 + f(a) - 1) < a$ pentru valori mari ale lui a – contradicţie cu proprietatea funcţiei f. Astfel $p = 2$ ($p \neq 1$, deoarece f este injectivă). Din $(**)$ reiese $f(x) \leq x, \forall x \in \mathbb{N}^*$, ceea ce, combinat cu pasul 2, duce la $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{N}^*$.

O altă abordare (*C. Reicher*). Punând $f(b)$ în locul lui b obţinem că, pentru orice $a, b \in \mathbb{N}^*$, a, b şi $f(f(a) + f(b) - 1)$ sunt lungimile laturilor unui triunghi nedegenerat.

Să considerăm acum $m, n \geq 2$ şi mulţimile $A = \{f(a) \mid 1 \leq a \leq n\}$, $B = \{f(b) \mid 1 \leq a \leq m\}$. Cum f este injectivă, $|A| = n$ şi $|B| = m$. Deoarece $1 \leq f(f(b) + f(a) - 1) \leq a + b - 1 \leq n + m - 1$, reiese:

$$\mathrm{card}\{f(f(b) + f(a) - 1) \mid 1 \leq a \leq n, 1 \leq b \leq m\} \leq n + m - 1$$

şi, deoarece f este injectivă:

$$\mathrm{card}\{f(b) + f(a) \mid 1 \leq a \leq n,\ 1 \leq b \leq m\} \leq n + m - 1,$$

de unde $|A + B| \leq |A| + |B| - 1$.

Pe de altă parte, teorema lui *Freiman*[1] afirmă că, în general, $|A+B| \geq$ $\geq |A|+|B|-1$, cu egalitate dacă şi numai dacă A şi B sunt progresii aritmetice cu aceeaşi raţie. Folosind în mod repetat acest argument pentru $n \geq 2$ şi $m = n + 1$, reiese că mulţimea $\{f(c) \mid c \geq 1\}$ este o progresie aritmetică cu primul termen $f(1) = 1$ şi raţia r. Deoarece f este surjectivă, trebuie $r = 1$, deci $f(c) = c$ pentru orice c.

La această problemă elevii români s-au descurcat bine, unul singur ratând rezolvarea, iar altul pierzând un punct pentru o afirmaţie nedovedită.

Problema 6. *Fie $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ numere reale pozitive şi M o mulţime de $n-1$ numere reale pozitive, care nu conţine elementul $a_1+\ldots+a_n$. Un greiere sare de-a lungul axei reale, pornind din origine şi făcând, într-o ordine oarecare, n salturi spre dreapta, de lungimi $a_1, \ldots, a_n$. Demonstraţi că greierele poate să aleagă ordinea salturilor astfel încât să nu aterizeze niciodată într-un punct din M.*

Rusia

---

[1] A se vedea şi problema 4 de la faza naţională a Olimpiadei de Matematică pentru clasa a IX-a, precum şi teorema *Cauchy-Davenport*.

Soluţie (*I. Bogdanov* & *A. Mellit*). Fie $m = \min M$. Raţionăm prin inducţie după n.

Cazul $n = 1$ este evident. Presupunem apoi că proprietatea este adevărată pentru orice $k < n$ (unde $n \geq 2$) şi o dovedim pentru o configuraţie cu n elemente. Notăm $\mathcal{I}_x$ ipoteza de inducţie aplicată unei configuraţii care porneşte din punctul de abscisă x.

Să presupunem mai întâi că $m \leq a_n$. Dacă $a_n \notin M$, continuăm secvenţa de salturi începută cu a_n aplicând $\mathcal{I}_{a_n}$ pentru $\{a_1, \ldots, a_{n-1}\}$ şi $M \cap (a, \infty)$ (dacă $M \cap (a, \infty)$ are mai puţin de $n-2$ elemente, $\mathcal{I}_{a_n}$ este, în continuare, aplicabilă). Dacă, însă, $a_n \in M$, atunci considerăm mulţimile $\{a_i, a_i + a_n\}$, $i \in \{1, \ldots, n-1\}$. Deoarece mulţimile considerate sunt disjuncte iar $M \setminus \{a_n\}$ are $n-2$ elemente, cel puţin una dintre aceste mulţimi, fie ea $\{b, b + a_n\}$ nu are elemente din M. În acest caz, primul salt este b, apoi a_n, apoi aplicăm $\mathcal{I}_{b+a_n}$ pentru $\{a_1, \ldots, a_{n-1}\} \setminus \{b\}$ şi $M \cap (b + a_n, \infty)$.

Să analizăm acum situaţia $m > a_n$. Aplicăm $\mathcal{I}_{a_n}$ pentru $\{a_1, \ldots, a_{n-1}\}$ şi $M \setminus \{m\}$. Dacă nicio săritură nu aterizează pe m, problema este rezolvată. Dacă, însă, după $k+1$ salturi $a_{i_0} = a_n, a_{i_1} \ldots, a_{i_k}$ se ajunge în m, atunci avem o secvenţă convenabilă dacă înlocuim primele $k+2$ salturi cu $a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}, a_{i_{k+1}}, a_n$.

Remarcă. Nu trebuie ca această soluţie, aparent simplă, să ne facă să credem că problema nu este prea grea: ea a fost rezolvată complet doar de trei elevi, fiind cotată, din acest punct de vedere, ca fiind a doua ca dificultate în istoria O.I.M.

Rezultatele elevilor noştri sunt rezumate în tabelul de mai jos. În clasamentul (neoficial) pe naţiuni, România a ocupat locul 13 din 104 ţări participante.

Nume	P1	P2	P3	P4	P5	P6	Total	Medalie
Mădălina Persu	7	7	7	6	7	0	34	Aur
Ömer Cerrahoğlu	7	7	2	7	7	3	33	Aur
Andrei Deneanu	7	7	2	4	7	0	27	Argint
Francisc Bozgan	7	7	2	6	2	0	24	Argint
Tudor Pădurariu	4	7	1	5	6	0	23	Bronz
Marius Tiba	7	7	1	0	7	0	22	Bronz

Rezultatele complete pot fi găsite pe `http://imo-official.org`.