Soluţii comentate ale unor probleme din G.M.-B

Extinderi ale unor probleme din *Gazeta Matematică*

de Marian Haiducu

Prezentăm soluţiile unor probleme de teoria numerelor, publicate în *Gazeta Matematică*. Discutăm metodologia rezolvării acestora şi arătăm cum pot fi obţinute generalizări.

Începem cu următoarea problemă.

Problema 1. Să se determine numerele naturale de trei cifre care împărţite la 7, 8 şi 9 dau resturile 1, 4 şi, respectiv, 7.

Adrian Gobej, Problema E:15559, G.M.-B Nr. 6-7-8/2019

Soluţie. Conform enunţului, vom căuta n, număr natural de trei cifre, astfel încât

$$\begin{cases} n = 7c_1 + 1, \\ n = 8c_2 + 4, \\ n = 9c_3 + 7, \end{cases}$$

unde c_1, c_2 şi c_3 sunt numere naturale.

Din primele două ecuaţii,

$$\begin{cases} n = 7c_1 + 1\big| \cdot 8 \\ n = 8c_2 + 4\big| \cdot 7 \end{cases},$$

obţinem

$$\begin{cases} 8n = 56c_1 + 8, \\ 7n = 56c_2 + 28, \end{cases}$$

de unde, prin scădere, găsim

$$n = 56(c_1 - c_2) - 20.$$

Printr-un raţionament similar, obţinem

$$n = 72(c_2 - c_3) - 20.$$

Cu notaţiile $k_1 = c_1 - c_2$ şi $k_2 = c_2 - c_3$, numere întregi, obţinem

$$\begin{cases} n = 56k_1 - 20, \\ n = 72k_2 - 20, \end{cases}$$

de unde

$$\begin{cases} n + 20 = 56k_1, \\ n + 20 = 72k_2, \end{cases}$$

ceea ce înseamnă că numărul natural $n + 20$ este, simultan, multiplu de 56 şi de 72. Rezultă că $n + 20$ este divizibil cu cel mai mic multiplu comun al numerelor 56 şi 72, care este 504. Prin urmare,

$$n + 20 = 504k,$$

deci $n = 504k - 20$, unde k este număr natural.

Cum numărul natural n are trei cifre, conchidem că $n \in \{484, 988\}$.

Vom prezenta acum o generalizare a acestei probleme.

Problema 2. Să se arate că există o infinitate de numere naturale care, împărţite la trei numere naturale consecutive nenule, $x, x+1$ şi $x+2$, dau resturile r_1, r_2 şi, respectiv, r_3, ce satisfac relaţia

$$r_1 + r_3 = 2r_2.$$

Soluţie. Căutăm n, număr natural, astfel încât

$$\begin{cases} n = xc_1 + r_1, & \text{cu } 0 \leq r_1 \leq x-1, \\ n = (x+1)c_2 + r_2, & \text{cu } 0 \leq r_2 \leq x, \\ n = (x+2)c_3 + r_3, & \text{cu } 0 \leq r_3 \leq x+1. \end{cases}$$

Din primele două ecuaţii,

$$\begin{cases} n = xc_1 + r_1 \big| \cdot (x+1) \\ n = (x+1)c_2 + r_2 \big| \cdot x \end{cases},$$

obţinem

$$\begin{cases} n(x+1) = x(x+1)c_1 + (x+1)r_1, \\ nx = x(x+1)c_2 + xr_2, \end{cases}$$

de unde, prin scădere, găsim

$$n = x(x+1)(c_1 - c_2) + r_1(x+1) - r_2 x.$$

Analog, găsim

$$n = (x+1)(x+2)(c_2 - c_3) + r_2(x+2) - r_3(x+1).$$

Dar, din $r_1 + r_3 = 2r_2$, prin înmulţire cu $x+1$, obţinem, succesiv, relaţiile

$$\begin{aligned} (x+1)r_1 + (x+1)r_3 &= 2(x+1)r_2, \\ (x+1)r_1 + (x+1)r_3 &= xr_2 + (x+2)r_2, \\ (x+1)r_1 - xr_2 &= (x+2)r_2 - (x+1)r_3. \end{aligned}$$

Cu notaţiile

$$\begin{cases} c_1 - c_2 = k_1, \\ c_2 - c_3 = k_2, \end{cases}$$

unde k_1 şi k_2 sunt numere întregi, şi

$$(x+1)r_1 - xr_2 = (x+2)r_2 - (x+1)r_3 = r,$$

obţinem

$$\begin{cases} n = x(x+1)k_1 + r, \\ n = (x+1)(x+2)k_2 + r, \end{cases}$$

de unde

$$\begin{cases} n - r = x(x+1)k_1, \\ n - r = (x+1)(x+2)k_2. \end{cases}$$

Atunci $n - r$ este multiplu, simultan, al numerelor $x(x+1)$ şi $(x+1)(x+2)$, deci $n - r$ este divizibil cu cel mai mic multiplu comun al acestora din urmă,

$$m = [x(x+1), (x+1)(x+2)].$$

Conchidem că $n = km + r$, unde $k \in \mathbb{N}$.

Continuăm cu următoarea problemă.

Problema 3. Să se arate că suma resturilor împărţirii unui număr oarecare, $\overline{abc}$, la a, b şi, respectiv, c nu poate fi 23.

Daniela Stănică şi Nicolae Stănică,
Problema S:E18.56, Supliment G.M.-B. Nr. 2/2018

Soluţie. Vom folosi metoda reducerii la absurd.

Presupunem că există numere naturale, $\overline{abc}$, astfel încât

$$\begin{cases} \overline{abc} = a \cdot q_1 + r_1, & r_1 < a \leq 9, \\ \overline{abc} = b \cdot q_2 + r_2, & r_2 < b \leq 9, \\ \overline{abc} = c \cdot q_3 + r_3, & r_1 < c \leq 9, \end{cases}$$

cu

$$r_1 + r_2 + r_3 = 23.$$

Rezultă

$$\begin{cases} r_1 = r_2 = 8, \\ r_3 = 7, \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} r_1 = r_3 = 8, \\ r_2 = 7, \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} r_2 = r_3 = 8, \\ r_1 = 7, \end{cases}$$

de unde găsim

$$\begin{cases} a = b = 9, \\ c \in \{8, 9\}, \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} a = c = 9, \\ b \in \{8, 9\}, \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} b = c = 9, \\ a \in \{8, 9\}, \end{cases}$$

şi atunci

$$\overline{abc} \in \{999, 998, 989, 899\}.$$

Dacă $\overline{abc} = 999$, atunci $r_1 + r_2 + r_3 = 0$, contradicţie.
Dacă $\overline{abc} = 998$, atunci $r_1 + r_2 + r_3 = 22$, contradicţie.
Dacă $\overline{abc} = 989$, atunci $r_1 + r_2 + r_3 = 21$, contradicţie.
Dacă $\overline{abc} = 899$, atunci $r_1 + r_2 + r_3 = 17$, contradicţie.

Deci, presupunerea făcută este falsă. Conchidem că nu există numere naturale de forma $\overline{abc}$ care, împărţite la a, b şi, respectiv, c, să dea resturi cu suma 23.

La fel ca mai devreme, vom prezenta acum o generalizare şi a acestei probleme.

Problema 4. Să se arate că, oricare ar fi $k \in \mathbb{N}$, cu $k \geq 4$, există numere de forma $\overline{a_1 a_2 ... a_k}$ astfel încât suma resturilor împărţirii lor la numerele $a_1, a_2, ..., a_k$ să fie $8k-1$.

Soluţie. Căutăm numere, $\overline{a_1 a_2 ... a_k}$, cu $k \geq 4$, astfel încât

$$\begin{cases} \overline{a_1 a_2 ... a_k} = a_1 \cdot c_1 + r_1, & 0 \leq r_1 < a_1 \leq 9, \\ \overline{a_1 a_2 ... a_k} = a_2 \cdot c_2 + r_2, & 0 \leq r_2 < a_2 \leq 9, \\ \vdots \\ \overline{a_1 a_2 ... a_k} = a_k \cdot c_k + r_k, & 0 \leq r_k < a_k \leq 9. \end{cases}$$

Atunci toate resturile anterioare, $r_1, r_2, ..., r_k$, sunt numere naturale cel mult egale cu 8. Rezultă că

$$r_1 + r_2 + ... + r_k \leq 8k.$$

Cum, din ipoteză, ştim că

$$r_1 + r_2 + ... + r_k = 8k - 1,$$

rezultă că avem $k-1$ resturi de 8 şi un rest de 7, deci $\overline{a_1 a_2 ... a_k}$ are $k-1$ cifre de 9 şi o cifră de 8 (varianta cu k cifre de 9 nu convine).

Observăm că, pentru $k = 4$, printre numerele 9998, 9989, 9899 şi 8999 găsim

$$\begin{cases} 8999 = 8k_1 + 7, \\ 8999 = 9k_2 + 8, \end{cases}$$

de unde

$$r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = 7 + 8 + 8 + 8 = 8 \cdot 4 - 1.$$

Deci, pentru $k = 4$, există drept soluţie numărul 8999.

Vom arăta că, pentru $k \geq 5$, numărul $n = \underbrace{99...9}_{k-4}8999$ este soluţie a problemei.

Notăm cu $S(x)$ suma cifrelor numărului natural x.

Cum $S(n) = 9(k-1) + 8$, rezultă că $n = 9k_1 + 8$, de unde

$$r_1 = r_2 = ... = r_{k-4} = r_{k-2} = r_{k-1} = r_k = 8.$$

Pe de altă parte,

$$\begin{aligned} n &= \underbrace{99...9}_{k-4}8999 = \underbrace{99...9}_{k-4}8 \cdot 10^3 + 999 = \underbrace{99...9}_{k-4}8 \cdot 8 \cdot 125 + 8 \cdot 124 + 7 \\ &= 8(\underbrace{99...9}_{k-4}8 \cdot 125 + 124) + 7, \end{aligned}$$

de unde $r_{k-3} = 7$.

În concluzie, pentru $n = \underbrace{99...9}_{k-4}8999$, avem

$$r_1 + r_2 + ... + r_k = \underbrace{8 + 8 + ... + 8}_{k-4 \text{ de } 8} + 7 + 8 + 8 + 8 = 8(k-1) + 7 = 8k - 1,$$

deci $n = \underbrace{99...9}_{k-4}8999$ este soluţie a problemei, pentru orice $k \geq 5$.

Comentariu. Oricare ar fi $k \in \mathbb{N}$, cu $k \geq 3$, există numere naturale de forma $\overline{a_1 a_2 ... a_k}$ astfel încât suma resturilor împărţirii lor la $a_1, a_2, ..., a_k$ să fie $8k - 2$. (Indicaţie: $n = \underbrace{99...9}_{k-1 \text{ de } 9}8$ este soluţie a problemei, pentru orice $k \geq 3$.)

BIBLIOGRAFIE

[1] Colecţia *Gazeta Matematică*, Seria B.

[2] `https://www.viitoriolimpici.ro/`

PROF. DR. MARIAN HAIDUCU

ŞCOALA GIMNAZIALĂ „MIHAI EMINESCU", PITEŞTI

E-mail: `marian.haiducu@gmail.com`