

Probleme aplicative

de IOANA MONICA MAȘCA

1. Contractția și dilatarea pupilei ochiului uman sau al unui animal

De mai bine de un secol, oamenii de știință știu că atât pupilele oamenilor, cât și ale animalelor răspund la mai mulți stimuli, nu doar la variații ale intensității luminii. Evenimente cognitive și emoționale pot, de asemenea, determina contractia și dilatarea acesteia, iar cercetătorii folosesc dimensiunea pupilei pentru a investiga o gamă largă de fenomene psihologice, procedeu numit *pupilometrie*. Psihologul **Daniel Kahneman** a declarat: *Pupilele reflectă intensitatea efortului mental într-un mod incredibil de precis*, adăugând următoarele: *Niciodată nu am realizat un studiu în care măsurarea să fie atât de precisă.*

Dilatarea pupilei ochiului unui animal, sub influența influxului luminos poate fi exprimată (în mm), cu ajutorul funcției

$$f(x) = \frac{160 \cdot x^{-0,4} + 90}{4 \cdot x^{-0,4} + 15},$$

unde x reprezintă intensitatea luminii ce atinge pupila. Dacă notăm cu m diametrul pupilei când intensitatea luminoasă este minimă și cu M diametrul la intensitate luminoasă maximă, calculați valorile m și M .



Rezolvare. În mod evident, valoarea m se atinge atunci când intensitatea luminoasă tinde la 0. Calculăm

$$\lim_{x \searrow 0} f(x) = \lim_{x \searrow 0} \frac{\frac{160}{x^{0,4}} + 90}{\frac{4}{x^{0,4}} + 15} = \lim_{x \searrow 0} \frac{160 + 90 \cdot x^{0,4}}{4 + 15 \cdot x^{0,4}} = \frac{160}{4} = 40$$

și găsim $m = 40$ mm. Pentru a-l determina pe M , calculăm

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{160 \cdot x^{-0,4} + 90}{4 \cdot x^{-0,4} + 15} = \frac{90}{15} = 6.$$

Deci, $M = 6$ mm.

2. Determinarea concentrației unei substanțe

Într-un bazin ce conține 10 litri de apă în stare pură, este pompată apă sărată ce are o concentrație de 20 de grame la litru, cu o viteză de 2 litri pe minut.

Determinați expresia concentrației de sare $C(t)$ (exprimată în g/l), după t minute, precum și concentrația pe termen lung a sării, respectiv,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} C(t).$$

Rezolvare. Expresia concentrației de sare, exprimată în g/l, este dată de

$$C(t) = \frac{\text{volumul de sare}}{\text{volumul total}} = \frac{20 \cdot 2 \cdot t}{10 + 2 \cdot t} = \frac{20t}{5 + t}.$$

În ceea ce privește concentrația pe termen lung, exprimată în g/l, aceasta poate fi determinată calculând

$$\lim_{t \rightarrow \infty} C(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{20t}{5 + t} = 20.$$

3. Aplicații directe ale produsului matricelor

Andrei și George își deschid un fast-food, urmând să comercializeze trei tipuri de sandwich-uri:

- (1) cu pâine, unt și dulceață,
- (2) pâine, șuncă și cașcaval,
- (3) pâine, cașcaval și sosuri.

În zorii fiecărei zile, Andrei (A) și George (G) își planifică să vândă din cele trei tipuri de sandwich-uri utilizând o matrice M ,

$$M = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ G \end{matrix} & \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix} \end{matrix} \in \mathcal{M}_{(2 \times 3)}(\mathbb{N}).$$

Fiecare sandwich poate conține felii de pâine (p), cuburi de unt (u), lingurițe de dulceață (d), felii de șuncă (s), felii de cașcaval (c), lingurițe de sosuri (m). Necesarul pentru toate acestea este reprezentat într-o altă matrice,

$$N = \begin{matrix} & \begin{matrix} p & u & d & s & c & m \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \end{matrix} \in \mathcal{M}_{(3 \times 6)}(\mathbb{N}).$$

Pentru a determina necesarul pentru sandwich-urile din matricea M , George face următorul calcul: $3(2) + 3(2) + 6(2) = 24$ felii de pâine (p), $3(4) + 3(0) + 6(0) = 12$ cuburi de unt (u), $3(4) + 3(0) + 6(0) = 12$ lingurițe de dulceață (d), ș. a.m.d., iar rezultatul este trecut într-o matrice

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} p & u & d & s & c & m \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ G \end{matrix} & \begin{pmatrix} 24 & 16 & 16 & 15 & 22 & 6 \\ 24 & 12 & 12 & 9 & 30 & 12 \end{pmatrix} \end{matrix} \in \mathcal{M}_{(2 \times 6)}(\mathbb{N}).$$

Costul în lei al ingredientelor este trecut în matricea

$$C = \begin{matrix} & \begin{matrix} p & u & d & s & c & m \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \end{matrix} \cdot \begin{matrix} & \text{Cost} \\ \begin{matrix} p \\ u \\ d \\ s \\ c \\ m \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0,12 \\ 0,15 \\ 0,10 \\ 0,30 \\ 0,25 \\ 0,12 \end{pmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & \text{Cost} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1,24 \\ 1,64 \\ 1,48 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Acum, Andrei și George ar dori să știe de câți bani are nevoie fiecare pentru a prepara toate sandwich-urile cuprinse în matricea M .

Rezolvare. Valorile din matricea produs $P = M \cdot N$ ne arată exact numărul de ingrediente necesar preparării sandwich-urilor dorite. Înmulțind

apoi matricea produs P cu matricea costurilor C , Andrei și George vor obține

$$(M \cdot N) \cdot C = \begin{matrix} & p & u & d & s & c & m \\ A & \begin{pmatrix} 24 & 16 & 16 & 15 & 22 & 6 \end{pmatrix} \\ G & \begin{pmatrix} 24 & 12 & 12 & 9 & 30 & 12 \end{pmatrix} \end{matrix} \cdot \begin{matrix} \text{Cost} \\ p \\ u \\ d \\ s \\ c \\ m \end{matrix} \begin{pmatrix} 0, 12 \\ 0, 15 \\ 0, 10 \\ 0, 30 \\ 0, 25 \\ 0, 12 \end{pmatrix} = \begin{matrix} \text{Cost} \\ A \\ G \end{matrix} \begin{pmatrix} 17, 60 \\ 17, 52 \end{pmatrix}.$$

Deci, costul pe care trebuie să îl suporte Andrei pentru prepararea sandwich-urilor este de 17,60 lei, iar cel pe care trebuie să îl suporte George este de 17,52 lei.

4. Codarea și decodarea mesajelor

Mircea și Vlad au o pasiune: codurile secrete, încifrarea și descifrarea mesajelor. Pentru aceasta, au nevoie doar de o matrice inversabilă $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Cu cât n este mai mare, cu atât codarea mesajelor este mai complexă. De data aceasta, pentru simplitatea calculelor, vor alege o matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$,

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 2 \\ 5 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \text{ numită } \textit{matrice de codare}.$$

Apoi, asociază fiecărei litere din alfabet câte un număr, la fel și spațiilor sau semnelor de întrebare și exclamare, după cum urmează:

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>F</i>	<i>G</i>	<i>H</i>	<i>I</i>	<i>J</i>
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
<i>K</i>	<i>L</i>	<i>M</i>	<i>N</i>	<i>O</i>	<i>P</i>	<i>Q</i>	<i>R</i>	<i>S</i>	
11	12	13	14	15	16	17	18	19	
<i>T</i>	<i>U</i>	<i>V</i>	<i>W</i>	<i>X</i>	<i>Y</i>	<i>Z</i>	?	!	
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29

Aleg mesajul care urmează a fi codat și folosind corespondența de mai sus, dau câte un număr fiecărei litere din mesajul ales. Totuși, pentru a-și ușura calculele, vor elimina spațiile dintre cuvinte.

I M A G I N A T I O N I S M O
 9 13 1 7 9 14 1 20 9 15 14 9 19 13 15

REIMPORTANTTHANKNOWLEDGE

Așază vertical numerele într-o matrice cu trei linii, dar aleg să codeze doar primele 15 litere ale mesajului. Matricea obținută este

$$\begin{pmatrix} 9 & 7 & 1 & 15 & 19 \\ 13 & 9 & 20 & 14 & 13 \\ 1 & 14 & 9 & 9 & 15 \end{pmatrix}$$

din $\mathcal{M}_{3 \times 5}(\mathbb{Z})$. Înmulțesc matricea de codare A cu matricea obținută:

$$\begin{pmatrix} 6 & 5 & 2 \\ 5 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & 7 & 1 & 15 & 19 \\ 13 & 9 & 20 & 14 & 13 \\ 1 & 14 & 9 & 9 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 121 & 115 & 34 & 178 & 209 \\ 112 & 108 & 33 & 163 & 190 \\ 45 & 46 & 15 & 67 & 79 \end{pmatrix}$$

iar apoi împart cele 15 numere obținute la 29 și formează o nouă matrice doar cu resturile rezultate: $\begin{pmatrix} 5 & 28 & 5 & 4 & 6 \\ 25 & 21 & 4 & 18 & 16 \\ 16 & 17 & 15 & 9 & 21 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 5}(\mathbb{Z})$. Acum, asociind

fiecărei cifre litera corespunzătoare, găsim $\begin{pmatrix} E & ? & E & D & F \\ Y & U & D & R & P \\ P & Q & O & I & U \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 5}(\mathbb{Z})$,

iar mesajul codat este EYP?UQEDODRIFPU.

Pentru a decripta un mesaj, se așază, la fel, vertical, numerele într-o matrice. Se determină inversa matricei de codare și se înmulțește la stânga cu matricea mesajului de decriptat. Valorile din matricea produs sunt împărțite apoi la 29, respectând întocmai teorema împărțirii cu rest (restul pozitiv și mai mic decât împărțitorul). Mircea și Vlad vă roagă ca, folosind aceeași matrice de criptare, să criptați ultimele nouă litere ale mesajului și să decriptați următorul mesaj de 9 caractere: ANSK UKJJ.

Rezolvare. Matricea corespunzătoare ultimelor litere este $\begin{pmatrix} 11 & 23 & 4 \\ 14 & 12 & 7 \\ 15 & 5 & 5 \end{pmatrix}$.

Înmulțită la stânga cu matricea de codare se obține $\begin{pmatrix} 166 & 208 & 69 \\ 155 & 185 & 65 \\ 65 & 75 & 27 \end{pmatrix}$, iar după

împărțirea la 29, avem $\begin{pmatrix} 21 & 5 & 11 \\ 10 & 11 & 7 \\ 7 & 17 & 27 \end{pmatrix}$. Mesajul codat va fi UJGEKQKG, (ultimul caracter este spațiul liber).

Inversa matricei de codare fiind $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$, prin înmulțire la stânga cu

$\begin{pmatrix} 1 & 11 & 11 \\ 14 & 27 & 10 \\ 19 & 21 & 10 \end{pmatrix}$ găsim $\begin{pmatrix} -13 & -16 & 1 \\ -11 & 1 & -11 \\ 67 & 51 & 1 \end{pmatrix}$, respectiv $\begin{pmatrix} 16 & 13 & 1 \\ 18 & 1 & 18 \\ 9 & 22 & 1 \end{pmatrix}$, ceea ce corespunde cuvântului PRIMAVARA.

PROF. DR. IOANA MONICA MAȘCA
COLEGIUL „NICOLAE TITULESCU”, BRAȘOV
E-mail: ioana.masca@yahoo.com