Concursul "Gazeta Matematică şi ViitoriOlimpici.Ro"
Etapa finală
Câmpulung Muscel, 17-22 august 2015

Soluţii şi baremuri – Clasa a IV-a

Problema 1. Câte numere naturale de cinci cifre trebuie să scriem pentru a fi siguri că printre ele există unul egal cu răsturnatul său?

ViitoriOlimpici.ro

Soluţie. Cea mai proastă situaţie ar fi să scriem pentru început toate numerele care nu sunt egale cu răsturnatul său. Următorul număr va fi un număr egal cu răsturnatul său. Pentru a afla câte astfel de numere avem, din numărul total de numere de cinci cifre scădem numărul de numere de cinci cifre egale cu răsturnatul lor. .... **4 p**

Numărul de numere de cinci cifre este

$$9 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 90000$$

.... **1p**

Numerele de cinci cifre egale cu răsturnatul lor au forma $\overline{abcba}$ şi numărul lor este

$$9 \times 10 \times 10 = 900$$

Numărul numerelor care nu sunt egale cu răsturnatul lor este

$$90000 - 900 = 89100$$

.... **1p**

În concluzie, trebuie să scriem 89101 numere. **1p**

Problema 2. Dintr-un pachet de cărţi de joc se scot două cărţi, diferite ca valoare. Dacă suma numerelor scrise pe cărţile rămase este 390, aflaţi ce numere sunt scrise pe cărţile scoase. (Asul se consideră că are scris pe el numărul 11.)

Gazeta Matematică

Soluţie. Suma tuturor numerelor scrise pe cărţile de joc dintr-un pachet, în condiţiile în care asul înseamnă 11, este egală cu

$$4 \times (2 + 3 + 4 + ... + 14) = 416$$

.... **2p**

Cum suma numerelor scrise pe cărţile rămase este 390 rezultă că suma numerelor scrise pe cărţile scoase este

$$416 - 390 = 26$$

.... **2p**

Numerele scrise pe cele două cărţi sunt 14 şi 12.

Varianta 13 şi 13 nu ne convine deoarece ”se scot două cărţi, diferite ca valoare”.

Dacă pe una dintre cărţi este scris un număr mai mic decât 12, atunci celălalt număr trebuie să fie mai mare decât 14, ceea ce este imposibil. . . . **3p**

Problema 3. În 19 vase sunt 71 de litri de apă. Unele vase au capacitatea de 5 litri, altele de 4 litri şi altele de 1 litru. Câte vase sunt de fiecare fel ştiind că vasele de 4 litri sunt de două ori mai multe decât vasele de 1 litru?

Soluţie. În două vase de 4 litri şi un vas de 1 litru, adică în trei vase, sunt 9 litri. Asta înseamnă că putem înlocui cele 3 vase cu 3 vase de câte 3 litri fiecare. În acest fel numărul vaselor rămâne acelaşi; la fel cantitatea de apă, dar problema se formulează astfel: ”În 19 vase sunt 71 de litri de apă. Unele vase au capacitatea de 5 litri, altele de 3 litri. Câte vase sunt de fiecare fel?”

. . . . **3p**

Rezolvăm această problemă prin metoda falsei ipoteze.

Dacă toate vasele ar fi de 5 litri, atunci cantitatea de apă ar fi

$$19 \times 5 = 95 \text{ (litri)}$$

Dar sunt 71 de litri. Diferenţa de 24 de litri ($95-71=24$) provine de la faptul că există şi vase de 3 litri. Pentru fiecare vas de 3 litri avem în plus 2 litri. Numărul vaselor de 3 litri este

$$24 : 2 = 12 \text{ (vase)}$$

iar numărul vaselor de 5 litri este

$$19 - 12 = 7 \text{ (vase)}$$

. . . . **2p**

În problema iniţială nu aveam vase de 3 litri, prin urmare cele 12 vase sunt de 4 litri, respectiv 1 litru.

Cum numărul vaselor de 4 litri este de două ori mai mare decât al vaselor de 1 litru obţinem imediat că sunt 8 vase de 4 litri şi 4 vase de 1 litru.

În concluzie avem 7 vase de 5 litri, 8 vase de 4 litri şi 4 vase de 1 litru.

. . . . **2p**

Concursul "Gazeta Matematică şi ViitoriOlimpici.Ro"
Etapa finală
Câmpulung Muscel, 17-22 august 2015

Soluţii şi baremuri – Clasa a V-a

Problema 1. Un număr natural se numeşte *perfect* dacă toate cifrele sale sunt pătrate perfecte şi suma oricăror două cifre alăturate este pătrat perfect.

a) Arătaţi că un număr perfect de 2015 cifre conţine în scrierea sa cel puţin 1007 cifre egale cu 0.

b) Stabiliţi câte numere perfecte de 5 cifre există.

ViitoriOlimpici.ro

Soluţie. a) Cifrele care sunt pătrate perfecte sunt 0, 1, 4 şi 9.

Observăm că suma oricăror două cifre nenule, dintre cele de mai sus, nu dau un pătrat perfect.

Deducem că suma a două astfel de cifre este un pătrat perfect dacă cel puţin una dintre ele este 0. .... **3p**

Prima cifră a oricărui număr este diferită de 0. Rămân celelalte 2014 cifre, pe care le grupăm câte două; sunt 1007 grupe. În fiecare grupă cel puţin una dintre cifre trebuie să fie 0 (pentru a avea suma a două cifre alăturate un pătrat perfect).

În concluzie, un număr perfect de 2015 cifre are cel puţin 1007 cifre egale cu 0. .... **1p**

b) Numerele perfecte de 5 cifre pot avea una dintre formele: $\overline{a0b0c}$, $\overline{a00b0}$, $\overline{a0b00}$, $\overline{a000b}$ sau $\overline{a0000}$, unde $a, b, c \in \{1, 4, 9\}$. **1p**

Numere de forma $\overline{a0b0c0}$ avem

$$3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$$

Pentru fiecare dintre formele $\overline{a00b0}$, $\overline{a0b00}$, $\overline{a000b}$ avem

$$3 \cdot 3 = 9 \text{ (numere)}$$

Numere de forma $\overline{a0000}$ sunt 3.

În concluzie avem $27 + 3 \cdot 9 + 3 = 57$ de numere. **2p**

Problema 2. Un teren agricol are formă dreptunghiulară şi aria de 7,2 ha. O parcelă din acest teren are dimensiunile jumătăţi din dimensiunile terenului, iar o altă parcelă are lungimea egală cu două cincimi din lungimea terenului, lăţimea fiind egală cu lăţimea terenului. Dacă perimetrele acestor două parcele sunt egale, determinaţi perimetrul terenului iniţial.

Monica Sas, Gazeta Matematică

Soluţie. Notăm lungimea terenului iniţial cu $10a$ (pentru a se putea împărţi uşor la 2 şi la 5) şi lăţimea cu $2b$ (pentru a se putea împărţi uşor la 2).

Cu acestea, una dintre parcele are lungimea $5a$ şi lăţimea b ("O parcelă din acest teren are dimensiunile jumătăţi din dimensiunile terenului"), iar cealaltă parcelă are dimensiunile $4a$ şi $2b$ (”o altă parcelă are lungimea egală cu două cincimi din lungimea terenului, lăţimea fiind egală cu lăţimea terenului”).

În aceste condiţii prima parcelă are perimetrul $10a + 2b$ iar a doua parcelă are perimetrul $8a + 4b$. **3p**

Cum cele două parcele au perimetrele egale avem $10a + 2b = 8a + 4b$ de unde $a = b$. **1p**

Cu aceasta lungimea terenului iniţial este $10a$, iar lăţimea $2a$. Cum aria terenului este

$$7,2 \text{ ha} = 72000 \text{ m}$$

avem

$$10a \cdot 2a = 72000$$

sau

$$20 \cdot a^2 = 72000$$

de unde

$$a = 60$$

.... **2p**

Obţinem lungimea terenului iniţial 600 m, iar lăţimea 120 m.

Perimetrul terenului iniţial este 1440 m. **1p**

Problema 3. Fie $\overline{ab}$ un număr care verifică relaţia

$$a^5 = 1019 + 4^b + a.$$

Determinaţi numărul $\overline{ab}$.

Soluţie. Dacă $b \neq 0$, atunci 4^b este număr par.

Pentru a număr par membrul stâng al egalităţii este număr par, iar membrul drept al egalităţi este număr impar, ceea ce înseamnă că egalitatea nu are loc.

Pentru a număr impar membrul stâng al egalităţii este număr impar, iar membrul drept al egalităţi este număr par, ceea ce înseamnă că egalitatea nu are loc nici în acest caz.

Deducem, din cele de mai sus, că $b = 0$ şi egalitatea devine

$$a^5 = 1020 + a$$

.... **3p**

Cum a este cifră avem

$$1020 \leq 1020 + a \leq 1029$$

adică

$$1020 \leq a^5 \leq 1029.$$

Dacă $a \leq 3$, atunci $a^5 \leq 243 < 1020$, iar dacă $a \geq 5$, atunci $a^5 \geq 3125 > 1029$.

Rezultă că singura valoare posibilă pentru a este 4. .... **3p**

Dacă $a = 4$, atunci $4^5 = 1024$ şi $1020 + 4 = 1024$, adică $a^5 = 1020 + a$.

Prin urmare, numărul căutat este 40. .... **1p**

Concursul "Gazeta Matematică şi ViitoriOlimpici.Ro"
Etapa finală
Câmpulung Muscel, 17-22 august 2015

Soluţii şi baremuri – Clasa a VI-a

Problema 1. Se consideră triunghiul echilateral ABC. Notăm cu E simetricul lui B faţă de C şi cu F simetricul lui C faţă de B. Considerăm punctele $L \in BC$, $M \in AF$ şi $N \in AE$ astfel încât $AL \perp BC$, $BM \perp AF$ şi $CN \perp AE$.

a) Arătaţi că $AE = AF$.

b) Demonstraţi că dreptele BM, CN şi AL sunt concurente.

c) Ştiind că $BM + MN + NC = 100\,\text{cm}$, calculaţi lungimea segmentului AB.

Constantin Niţă Cristi, ViitoriOlimpici.ro

Soluţie. a) Triunghiurile ABF şi ACE sunt congruente (L.U.L.), prin urmare $AE = AF$. **2p**

b) Fiind înălţimi ale bazelor în triunghiuri isoscele, BM, CN şi AL sunt bisectoare ale unghiurilor $\angle ABF$, $\angle ACE$ respectiv $\angle BAC$. **1p**

Concurenţa dreptelor BM, CN şi AL revine la concurenţa bisectoarelor exterioare din B şi C şi a bisectoarei interioare din A ale triunghiului ABC. **1p**

c) BM este catetă care se opune unui unghi de 30° în triunghiul dreptunghic ABM, prin urmare $BM = \frac{1}{2}AB$. Analog se arată că $CN = \frac{1}{2}AB$. **1p**

MN este linie mijlocie în triunghiul AFE, deci $MN = \frac{1}{2}FE = \frac{3}{2}AB$. .. **1p**

Astfel, $BM + MN + NC = \frac{5}{2}AB = 100\,\text{cm}$, de unde $AB = 40\text{cm}$. **1p**

Problema 2. Fie a, b, c, d, e, f cifre (în baza 10) cu $a \cdot f \neq 0$.

a) Dacă $\overline{abcde} = 10008 \cdot f$, arătaţi că numărul $\overline{abcdef}$ este divizibil cu 41.

Prelucrare, Gazeta Matematică nr. 6-7-8/2015

b) Demonstraţi că numărul $\overline{abcdef}$ este divizibil cu 41 dacă şi numai dacă numărul $\overline{fabcde}$ este divizibil cu 41.

Cristian Mangra şi Mircea Fianu

Soluţie. a) $\overline{abcdef} = 10 \cdot \overline{abcde} + f = 100081 \cdot f = 41 \cdot 2441 \cdot f \,\vdots\, 41$. *Altfel*, se determină cele nouă numere care au proprietatea din enunţ şi se verifică faptul că fiecare dintre ele este divizibil cu 41. .... **3p**

b) Deoarece $\overline{abcdef} = 10\overline{abcde} + f$, avem $10\overline{fabcde} - \overline{abcdef} = 10^6 \cdot f + 10\overline{abcde} - 10\overline{abcde} - f = 99999 \cdot f = 41 \cdot 2431$. **2p**

Dacă $\overline{fabcde} \,\vdots\, 41$, este clar că $\overline{abcdef} \,\vdots\, 41$. Reciproc, dacă $\overline{abcdef} \,\vdots\, 41$, deoarece numerele 41 şi 10 sunt relativ prime, rezultă că $\overline{fabcde} \,\vdots\, 41$. **2p**

Problema 3. Scriem fiecare număr natural de trei cifre pe câte un cartonaş şi introducem cele 900 de cartonaşe într-o cutie.

a) Extragem, la întâmplare, un cartonaş din cutie. Care este probabilitatea ca numărul de pe cartonaşul extras să aibă suma cifrelor 5?

b) Care este numărul minim de cartonaşe pe care trebuie să le extragem, fără a ne uita la ele, pentru a fi siguri că vom obţine cel puţin şapte numere cu aceeaşi sumă a cifrelor?

Sergiu Prisacariu şi Gabriel Popa

Soluţie. a) Există 15 numere de trei cifre care au suma cifrelor 5: 104, 113, 122, 131, 140, 203, 212, 221, 230, 302, 311, 320, 401, 410, 500. Probabilitatea cerută este $P = \frac{15}{900} = \frac{1}{60}$. **2p**

b) Sumele posibile ale cifrelor numerelor de pe cartonaşe sunt 1, 2, 3, ..., 27. Există un singur cartonaş cu suma cifrelor 1 (anume 100) şi doar unul cu suma cifrelor 27 (anume 999). Avem în cutie câte trei cartonaşe cu sumele cifrelor 2 (101, 110 şi 200) sau 26 (anume 998, 989 şi 899). Există câte şase cartonaşe cu sumele cifrelor 3 (300, 210, 201, 120, 102 şi 111) sau 25 (anume 988, 898, 889, 997, 979, 799). Celelalte 21 posibile sume ale cifrelor (4, 5, 6, ..., 24) apar, fiecare, pe mai mult de câte şase cartonaşe. **2p**

Dacă vom extrage $2 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 6 + 21 \cdot 6 = 146$ cartonaşe, este posibil să avem cel mult câte şase numere cu o aceeaşi sumă a cifrelor. **2p**

Numărul minim de cartonaşe pe care trebuie să le extragem, fără a ne uita la ele, pentru a fi siguri că vom obţine cel puţin şapte numere cu aceeaşi sumă a cifrelor este $146 + 1 = 147$. **1p**

Soluţii şi baremuri – Clasa a VII-a

Problema 1. Arătaţi că pentru orice număr real x au loc inegalităţile:
a) $x^8 + x^5 + 1 > x^4 + x$,

Gazeta Matematică nr. 6-7-8/2015

b) $x^8 + x^3 + 1 > x^7 + x^4$,
c) $x^8 + x^5 + x^3 + 1 > x^7 + x$.

Soluţie. a) Rescriem inegalitatea succesiv $x^8 + x^5 - x^4 - x + 1 > 0$, $x^8 + x^4(x-1)-(x-1) > 0$, $x^8+(x^4-1)(x-1) > 0$, $x^8+(x^2+1)(x+1)(x-1)^2 > 0$. Dacă $x \geq -1$ membrul stâng este o sumă de două numere nenegative care nu sunt simultan 0, deci este pozitiv. **1p**

Pe de altă parte, inegalitatea din enunţ se poate rescrie echivalent $1+x(x^7+x^4-x^3-1) = 1+x(x^4-1)(x^3+1)$. Dacă $x < -1$ atunci $x^3 < -1$, iar $x^4 > 1$, deci $x^4 - 1 > 0$, $x^3 + 1 < 0$, deci $x(x^4-1)(x^3+1) > 0$, de unde concluzia. **1p**

b) Se poate proceda ca la a) sau se poate observa că punând $x = \frac{1}{y}$ în inegalitatea de la a) se obţine că $y^8 + y^3 + 1 > y^7 + y^4$, $\forall\, y \neq 0$, inegalitatea fiind evidentă şi pentru $y = 0$. **3p**

c) Dacă $x \geq 0$, atunci $x^8+x^5+x^3+1-x^7-x = x^5+x^3+(x-1)(x^7-1) > 0$ pentru că numerele $x-1$ şi x^7-1 au acelaşi semn. **1p**

Dacă $x < 0$, atunci $x^8+x^5+x^3+1-x^7-x = x^8+1-x(x^2-1)(x^4-1) = (x^8+1) - x(x^2-1)^2(x^2+1) > 0$, primul termen fiind pozitiv, în timp ce al doilea este nenegativ. **1p**

Problema 2. Care este cel mai mic număr natural nenul care se scrie atât ca suma a 2015 numere naturale care au o aceeaşi sumă a cifrelor, cât şi ca suma a 2016 numere naturale care au o aceeaşi sumă a cifrelor? (Suma cifrelor numerelor din prima sumă şi suma cifrelor numerelor din cea de-a doua sumă nu trebuie să fie neapărat egale.)

ViitoriOlimpici.ro

Soluţie. Pentru un număr natural N vom nota cu $s(N)$ suma cifrelor sale. Se ştie că $s(N) \equiv N \pmod 9$, $\forall\, N \in \mathbb{N}$.

Fie n numărul căutat. Atunci există $a_1, a_2, \ldots, a_{2015}$ cu $s(a_1) = s(a_2) = \ldots = s(a_{2015}) = s$ şi $b_1, b_2, \ldots, b_{2016}$ cu $s(b_1) = s(b_2) = \ldots = s(b_{2016}) = s'$ astfel ca $n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{2015} = b_1 + b_2 + \ldots + b_{2016}$.

Atunci $n \equiv s(b_1) + s(b_2) + \ldots + s(b_{2016}) = 2016s' \equiv 0 \pmod 9$, deci $9 \mid n$.
.... **2p**

Dar $n \equiv s(a_1) + s(a_2) + \ldots + s(a_{2015}) = 2015s \pmod 9$ şi $(2015, 9) = 1$ implică $9 \mid s$. Cum $s \neq 0$, rezultă $s \geq 9$, deci $a_i \geq 9$, de unde $n \geq 2015 \cdot 9 = 18135$. **3p**

Vom arăta că numărul căutat este chiar 18135. Evident el se scrie $a_1 + a_2 + \ldots + a_{2015}$ cu $a_i = 9$, $\forall\, i = \overline{1, 2015}$.

Vom arăta în continuare că el se scrie ca $b_1+b_2+\ldots+b_{2016}$, cu $b_j \in \{1,\,10\}$ (deci cu $s(b_j)=1,\ \forall\, j$).

Alegând $b_1=b_2=\ldots=b_k=10$ şi $b_{k+1}=b_{k+2}=\ldots=b_{2016}=1$, trebuie ca $b_1+b_2+\ldots+b_{2016}=2016+9k=18135$. Rezultă $k=1791$, deci 18135 se scrie ca suma a 2016 numere care au suma cifrelor 1. .... **2p**

Observaţie: Există şi alte alegeri ale numerelor $b_1, b_2, \ldots, b_{2016}$, nu numai cu $s'=1$.

Problema 3. Fie ABC un triunghi ascuţitunghic şi A', B', C' picioarele înălţimilor din A, B, respectiv C. Fie t tangenta în A la cercul circumscris triunghiului ABC.

a) Arătaţi că t este paralelă cu $B'C'$.

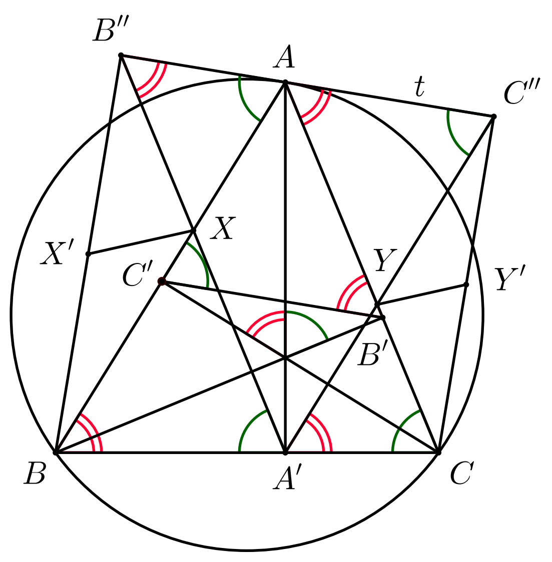
b) Dacă B'' şi C'' sunt proiecţiile lui B, respectiv C, pe t, demonstraţi că $A'B''$ este paralelă cu AC, iar $A'C''$ este paralelă cu AB.

c) Fie $\{X\}=A'B''\cap AB$ şi $\{Y\}=A'C''\cap AC$, X' mijlocul lui $[BB'']$ şi Y' mijlocul lui $[CC'']$. Demonstraţi că dreptele XX' şi YY' sunt paralele.

Soluţie. a) Patrulaterul $BCB'C'$ este înscris în cercul de diametru $[BC]$, deci $m(\angle AC'B')=180^\circ - m(\angle B'C'B)=m(\angle ACB)$. Dar unghiurile $\angle ACB$ şi $B''AB$ subîntind acelaşi arc, AB, deci sunt congruente. Rezultă că $\angle B''AC' \equiv \angle AC'B'$, ceea ce implică paralelismul cerut. **2p**

b) Patrulaterul $AB''BA'$ este înscris în cercul de diametru $[AB]$, deci $\angle B''A'B \equiv \angle B''AB \equiv \angle ACB$, de unde rezultă că $B''A' \parallel AC$.
Analog rezultă că $C''A' \parallel AB$. **2p**

c) Din cele de mai sus rezultă că $AXA'Y$ este paralelogram, deci $\Delta\, AXA' \equiv \Delta\, A'YA$. Pe de altă parte, $\Delta\, BXB'' \sim \Delta\, A'XA$ şi $\Delta\, AYA' \sim \Delta\, CYC''$, de unde $\Delta\, B''XB \sim \Delta\, CYC''$. Rezultă că $\angle B''BX \equiv \angle CC''Y$ şi $\dfrac{XC}{YB''} = \dfrac{B''B}{CC''} = \dfrac{BX'}{C''Y'}$, deci triunghiurile XBX' şi $YC''Y'$ sunt asemenea. Obţinem că $\angle BX'X \equiv \angle C''Y'Y$ şi, cum $BB'' \parallel CC''$, rezultă concluzia. **3p**



Concursul Gazeta Matematică şi ViitoriOlimpici.Ro
Etapa finală
Câmpulung Muscel, 17-22 august 2015

Soluţii şi baremuri – Clasa a VIII-a

Problema 1. a) Este inegalitatea $PA+PB < CA+CB$ adevărată pentru orice triunghi ABC şi orice punct P din interiorul acestuia?

b) Este inegalitatea $PA+PB+PC < DA+DB+DC$ adevărată pentru orice tetraedru $ABCD$ şi orice punct P din interiorul acestuia?

ViitoriOlimpici.ro

Soluţie. a) Inegalitatea este adevărată. Fie $\{Q\} = AP \cap BC$. Folosind inegalitatea triunghiului, avem $PA+PB < PA+(PQ+QB) = AQ+QB < (AC+CQ)+QB = AC+CB$. **3p**

b) Inegalitatea nu este adevărată în orice tetraedru. Se pot descrie numeroase exemple.

1. De exemplu, alegând ABC un triunghi dreptunghic isoscel, cu $m(\angle A) = 90°$ şi $AB = AC = 100$, iar D astfel ca $DA \perp (ABC)$, $DA = 1$, atunci $DA+DB+DC = 1+2\sqrt{10001} \approx 201$. Alegând punctul P foarte aproape de B, vom avea $PA+PB+PC \approx BA+BC = 100+100\sqrt{2} \approx 241 > 201$.

2. Vom da şi un exemplu riguros: considerăm o piramidă regulată cu baza BCD de latură 3 şi muchie laterală de lungime 100. Atunci $DA+DB+DC = 106$. Fie O centrul bazei. Atunci $BO = \sqrt{3}$. Înălţimea piramidei este $AO = \sqrt{9997} > 99$. Alegem $P \in (AO)$ astfel încât $PO = 99$. Atunci $PB = PC = \sqrt{3+99^2} = \sqrt{9804}$, deci $PA+PB+PC = 2\sqrt{9804}+\sqrt{9997}-99 > 2\cdot 99+99-99 = 198 > 106$. **4p**

Problema 2. a) Aflaţi toate numerele prime p ştiind că ecuaţia

$$x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)+3xyz = p^2$$

are soluţii numere naturale nenule.

Gazeta Matematică nr. 6-7-8/2015

b) Aflaţi toate numerele prime p şi numerele naturale nenule n pentru care ecuaţia

$$x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)+2xyz = p^n$$

are soluţii numere naturale nenule şi determinaţi numărul acestor soluţii.

Andrei Eckstein

Soluţie. a) Ecuaţia se scrie echivalent $(x+y+z)(xy+yz+zx) = p^2$. **1p**

Cum $xy \geq x \geq 1$, $yz \geq y \geq 1$, $zx \geq z \geq 1$ rezultă că $1 < x+y+z \leq xy+yz+zx$, deci singura posibilitate este $x+y+z = xy+yz+zx = p$. Ori egalitate în inegalitatea $x+y+z \leq xy+yz+zx$ avem numai pentru $x=y=z=1$, deci $p=3$ ($x=y=z=1$ verifică într-adevăr ecuaţia pentru $p=3$). **1p**

b) Ecuaţia se scrie echivalent $(x+y)(y+z)(z+x) = p^n$. **1p**

Dintre numerele x, y, z există măcar două de aceeaşi paritate, deci suma lor este pară, prin urmare $(x+y)(y+z)(z+x)$ este par. Rezultă că p este par. Fiind prim, rezultă $p=2$. **1p**

Membrul stâng find cel puţin $(1+1)(1+1)(1+1) = 2^3$, pentru $n \in \{1,2\}$ ecuaţia nu are soluţii, iar pentru $n=3$ avem soluţia unică $x=y=z=1$.

Pentru $n \geq 4$, trebuie ca $x+y=2^a$, $y+z=2^b$, $z+x=2^c$, cu $a,b,c \in \mathbb{N}^*$, $a+b+c=n$. Atunci $2(x+y+z)=(x+y)+(y+z)+(z+x)=2^a+2^b+2^c$, de unde $x+y+z=\dfrac{2^a+2^b+2^c}{2}$, deci $x=(x+y+z)-(y+z)=\dfrac{2^a+2^c-2^b}{2}$, $y=\dfrac{2^a+2^b-2^c}{2}$, $z=\dfrac{2^b+2^c-2^a}{2}$. **1p**

Pentru ca $x,y,z \in \mathbb{N}^*$ trebuie ca $2^a, 2^b, 2^c$ să fie lungimi de laturi de triunghi, adică cele mai mari două dintre numerele a,b,c să fie egale.

Dacă $n=6k$, $k \in \mathbb{N}^*$, (a,b,c) poate fi $(2k,2k,2k)$, $(2k-2,2k+1,2k+1)$, $(2k-4,2k+2,2k+2)$, $\ldots$, $(2,3k-1,3k-1)$ sau permutări ale acestora, deci ecuaţia are $1+3(k-1)=3k-2$ soluţii.

Dacă $n=6k+1$, $k \in \mathbb{N}$, atunci (a,b,c) poate fi $(2k-1,2k+1,2k+1)$, $(2k-3,2k+2,2k+2)$, $\ldots$, $(1,3k,3k)$ sau permutări ale acestora, deci ecuaţia are $3k$ soluţii.

Dacă $n=6k+2$, $k \in \mathbb{N}$, atunci (a,b,c) poate fi $(2k,2k+1,2k+1)$, $(2k-2,2k+2,2k+2)$, $\ldots$, $(2,3k,3k)$ sau permutări ale acestora, deci ecuaţia are $3k$ soluţii.

Dacă $n=6k+3$, $k \in \mathbb{N}$, atunci (a,b,c) poate fi $(2k+1,2k+1,2k+1)$, $(2k-1,2k+2,2k+2)$, $\ldots$, $(1,3k+1,3k+1)$ sau permutări ale acestora, deci ecuaţia are $3k+1$ soluţii.

Dacă $n=6k+4$, $k \in \mathbb{N}$, atunci (a,b,c) poate fi $(2k,2k+2,2k+2)$, $(2k-2,2k+3,2k+3)$, $\ldots$, $(2,3k+1,3k+1)$ sau permutări ale acestora, deci ecuaţia are $3k$ soluţii.

Dacă $n=6k+5$, $k \in \mathbb{N}$, atunci (a,b,c) poate fi $(2k+1,2k+2,2k+2)$, $(2k-1,2k+3,2k+3)$, $\ldots$, $(1,3k+2,3k+2)$ sau permutări ale acestora, deci ecuaţia are $3k+3$ soluţii.

În concluzie, ecuaţia are soluţii naturale nenule dacă şi numai dacă $p=2$ şi $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1,2,4\}$. **2p**

Problema 3. a) Daţi exemplu de o mulţime formată din 10 numere naturale care are proprietatea că, oricum am alege şase elemente distincte ale ei, suma acestora nu este divizibilă cu 6.

b) Demonstraţi că orice mulţime formată din 11 numere naturale are cel puţin o submulţime cu şase elemente a căror sumă este divizibilă cu 6.

Soluţie. a) De exemplu orice mulţime formată cu cinci numere divizibile cu 6 şi cinci numere care dau restul 1 la împărţirea cu 6, în particular $\{0,1,6,7,12,13,18,19,24,25\}$. **3p**

b) Fie $M=\{x_1,x_2,\ldots,x_{11}\} \subset \mathbb{N}$. Din orice trei numere naturale putem alege două astfel ca suma lor să fie un număr par. Alegem 3 numere din mulţimea M. Vom putea forma o pereche cu suma pară. Rămân 9 numere. Alegem trei. Extragem două cu suma pară. Continuăm procedeul până când obţinem 5 perechi disjuncte de elemente din M cu suma în fiecare pereche un număr par.

Din orice cinci numere putem alege trei cu suma divizibilă cu 3. Într-adevăr, dacă avem trei numere care dau un acelaşi rest la înmpărţirea la 3, le alegem pe acelea, iar dacă nu, atunci trebuie să avem cel puţin câte un număr care dă rest 0, 1 respectiv 2 la împărţirea cu 3 şi alegem câte unul de fiecare fel. Procedând astfel cu cele 5 sume obţinute anterior, obţinem 3 sume a căror sumă este divizibilă cu 6, adică obţinem 6 elemente cu suma divizibilă cu 6.

.... **4p**

Soluţii şi baremuri – Clasa a IX-a

Problema 1. Să se demonstreze că un triunghi ABC este isoscel dacă şi numai dacă

$$A'B + B'C + C'A = A'C + B'A + C'B,$$

unde A', B' şi C' sunt picioarele bisectoarelor interioare ale unghiurilor A, B, respectiv C.

Gazeta Matematică nr. 6-7-8/2015

Soluţie. Este clar că dacă triunghiul este isoscel relaţia din enunţ este satisfăcută.

Demonstrăm implicaţia inversă. Notăm cu a, b şi c lungimile laturilor BC, CA şi AB. Aplicând unghiului $\angle BAC$ teorema bisectoarei, obţinem

$$A'B = \frac{ac}{b+c} \text{ şi } A'C = \frac{ab}{b+c}.$$

Relaţii analoage se obţin şi pentru celelalte segmente.

Relaţia din enunţ devine:

$$\frac{a(b-c)}{b+c} + \frac{b(c-a)}{c+a} + \frac{c(a-b)}{a+b} = 0.$$

Deoarece $c - a = (c - b) + (b - a)$, egalitatea devine:

$$\frac{a(b-c)}{b+c} + \frac{b(c-b)}{c+a} + \frac{b(b-a)}{c+a} + \frac{c(a-b)}{a+b} = 0,$$

echivalentă cu

$$(b-c)\frac{(a-b)(a+b+c)}{(a+c)(b+c)} + (a-b)\frac{(c-b)(a+b+c)}{(a+b)(a+c)} = 0.$$

În final se obţine:

$$\frac{(b-c)(a-b)(a-c)(a+b+c)}{(a+c)(b+c)(a+b)} = 0,$$

de unde rezultă că triunghiul isoscel.

Problema 2. Să se determine funcţiile $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ care verifică relaţia

$$f(n+1) = f(f(n)) + 1,$$

pentru orice număr natural nenul n.

ViitoriOlimpici.ro

Soluţie. Vom arăta că singura funcţie care verfică relaţia din enunţ este $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$, $f(n) = n$. Pentru aceasta va fi suficient să arătăm că $f(1) = 1$, după care se poate demonstra prin inducţie după n.

Notăm cu $B \subset \mathbb{N}^*$ imaginea funcţiei f, care este evident nevidă. Există atunci un cel mai mic element (notat cu β) al lui B.

Să observăm mai întâi că $f(1) = \beta$. Într-adevăr, dacă $f(1) \neq \beta$, va exista un număr natural $\alpha > 1$ astfel încât $f(\alpha) = \beta$. Din relaţia din enunţ, rezultă $f(f(\alpha - 1)) = f(\alpha) - 1 = \beta - 1 \in B$, ceea ce ar contrazice minimalitatea lui β.

Este clar că mulţimea B conţine şi alte elemente în afară de β, altfel ar rezulta că $\beta = \beta + 1$.

Fie γ cel mai mic element al mulţimii $B \setminus \{\beta\}$. Ca mai sus, există un număr natural $\theta > 1$ astfel încât $f(\theta) = \gamma$.

Din nou, din relaţia din enunţ, avem că $f(f(\theta - 1)) = f(\theta) - 1 = \gamma - 1 \in B$. Cum β este singurul element din B mai mic decât γ, rezultă că $\gamma - 1 = \beta$.

Am obţinut astfel că $f(f(\theta - 1)) = \beta = f(1)$, şi deci $f(\theta - 1) = 1$ (singurul număr $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care $f(n) = \beta$ este $n = 1$). Obţinem astfel că $1 \in B$ şi deci cel mai mic element al lui B este $\beta = 1$, de unde rezultă că $f(1) = 1$.

Problema 3. Fie ABC un triunghi scalen ascuţitunghic, având ortocentrul H şi cercul circumscris Γ. Notăm cu M mijlocul segmentului $[BC]$. Fie F al doilea punct de intersecţie a dreptei AH cu cercul Γ. Fie E punctul de intersecţie a dreptei HM cu cercul Γ astfel încât punctul H se află între punctele M şi E. Notăm cu N punctul de intersecţie a dreptei EF cu dreapta BC. Să se demonstreze că unghiurile $\sphericalangle BHN$ şi $\sphericalangle MHC$ sunt congruente.

Mircea Fianu

Soluţie. Fie O centrul cercului Γ şi T al doilea punct de intersecţie a dreptei HM cu cercul Γ.

Se ştie că $AH = 2OM = BC \operatorname{ctg} A$. Cum $AH \parallel OM$, MO va fi linie mijlocie în triunghiul THA. Obţinem astfel că $HBTC$ este paralelogram.

Nu e greu de văzut că avem următoarele două congruenţe de unghiuri:

$$\angle CHT \equiv \angle HTB \text{ şi } \angle BHN \equiv \angle BFE.$$

Cum unghiurile $\angle BFE$ şi $\angle BTH$ subîntind arcul $\widehat{BE}$, se obţine congruenţa din enunţ.

Concursul Gazeta Matematică şi ViitoriOlimpici.Ro
Etapa finală
Câmpulung Muscel, 17-22 august 2015

Soluţii şi baremuri – Clasa a X-a

Problema 1. Notăm cu $\mathcal{F}$ mulţimea funcţiilor $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că

$$f(f(x) + y) = f(x) + f(y),$$

oricare ar fi numerele reale x şi y.

a) Determinaţi funcţiile injective din $\mathcal{F}$.

b) Determinaţi funcţiile surjective din $\mathcal{F}$.

Dorel Miheţ şi Mihai Monea, ViitoriOlimpici.ro

Soluţie. a) Relaţia din ipoteză conduce la $f(f(x)+y) = f(x)+f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$ şi $f(f(y) + x) = f(y) + f(x), \forall x, y \in \mathbb{R}$. Obţinem imediat că

$$f(f(x) + y) = f(f(y) + x), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

.... **1p**

Deoarece f este injectivă, rezultă că

$$f(x) + y = f(y) + x \Longleftrightarrow f(x) - x = f(y) - y, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

.... **1p**

Considerăm funcţia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(t) = f(t) - t$. Funcţia g verifică relaţia $g(x) = g(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$, aşadar există $a \in \mathbb{R}$ pentru care $g(x) = a, \forall x \in \mathbb{R}$. **1p**

În concluzie, funcţiile căutate sunt cele de forma

$$f(x) = x + a, \forall x \in \mathbb{R}$$

şi se verifică faptul că aceste funcţii sunt soluţii ale problemei. **1p**

b) Fie f o funcţie surjectivă din $\mathcal{F}$; vom arăta că f este şi injectivă. ..**1p**

Pentru aceasta, fie $a, b \in \mathbb{R}$ pentru care $f(a) = f(b)$. Din ipoteză, avem că

$$f(f(x)) = f(x) + f(0), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Există $c, d \in \mathbb{R}$ pentru care $f(c) = a$ şi $f(d) = b$. Înlocuind $x = c$, apoi $x = d$ în relaţia anterioară, obţinem $f(a) = a + f(0)$, respectiv $f(b) = b + f(0)$. Din $f(a) = f(b)$ rezultă că $a + f(0) = b + f(0)$, deci $a = b$.

Prin urmare, funcţiile surjective sunt injective şi regăsim soluţiile de la punctul anterior. **2p**

Problema 2. Considerăm două numere complexe u şi v, având acelaşi modul, pentru care există a, b, c şi d numere reale strict pozitive astfel încât $\max\{a,b,c\} < d$, $a+d = b+c$ şi

$$|au+dv| \le |bu+cv|.$$

Demonstraţi că $u = v$.

Prelucrare de Mihai Monea, Gazeta Matematică nr. 6-7-8/2015

Soluţia I. Ultima relaţie din ipoteză se scrie succesiv:

$$\begin{aligned}
& |au+dv|^2 \le |bu+cv|^2 \\
\Leftrightarrow\ & (au+dv)(a\overline{u}+d\overline{v}) \le (bu+cv)(b\overline{u}+c\overline{v}) \\
\Leftrightarrow\ & \left(a^2+d^2\right)|u|^2 + ad\,(u\overline{v}+\overline{u}v) \le \left(b^2+c^2\right)|u|^2 + bc\,(u\overline{v}+\overline{u}v) \text{ ....} \mathbf{1p} \\
\Leftrightarrow\ & (a+d)^2|u|^2 - 2ad\,|u|^2 + ad\,(u\overline{v}+\overline{u}v) \le (b+c)^2|u|^2 - 2bc\,|u|^2 + bc\,(u\overline{v}+\overline{u}v) \\
\Leftrightarrow\ & ad\left(u\overline{v}+\overline{u}v - 2|u|^2\right) \le bc\left(u\overline{v}+\overline{u}v - 2|u|^2\right) \text{ ....} \mathbf{2p} \\
\Leftrightarrow\ & (ad-bc)\left(u\overline{v}+\overline{u}v - |u|^2 - |v|^2\right) \le 0 \\
\Leftrightarrow\ & (bc-ad)\,|u-v|^2 \le 0
\end{aligned}$$

.... **1p**

Pe de altă parte, este adevărată inegalitatea $bc > ad$. Într-adevăr, putem presupune $b \le c$ şi, cum $d - c = b - a \overset{not}{=} r > 0$, avem:

$$ad = (c+r)(b-r) = bc - r(c-b) - r^2 < bc.$$

.... **2p**

Rezultă astfel că $|u-v|^2 = 0$ şi, de aici, concluzia problemei. **1p**

Soluţia a II-a. Notăm $k = \frac{d}{a+d}$ şi $l = \frac{c}{b+c}$; relaţia din enunţ se poate scrie sub forma

$$(1) \quad |(1-k)u + kv| \le |(1-l)u + lv|.$$

.... **1p**

Presupunem, prin absurd, că $u \ne v$. În planul complex de origine $O(0)$, considerăm punctele (distincte, conform presupunerii asumate!) $A(u), B(v)$, $M((1-k)u+kv)$ şi $N((1-l)u+lv)$. Evident, punctele M şi N sunt interioare segmentului AB. **3p**

În plus, deoarece $k > l$ şi $k > 1-l$, punctul N este situat între punctele M şi M', unde M' este simetricul lui M faţă de mijlocul segmentului AB. Rezultă că $OM > ON$, prin urmare

$$(2) \quad |(1-k)u + kv| > |(1-l)u + lv|.$$

Relaţiile (1) şi (2) fiind contradictorii, rămâne adevărată concluzia problemei. **3p**

Problema 3. Demonstraţi că singurul număr natural $n \geq 2$ cu proprietatea că

$$\sqrt{a+\sqrt{b+\sqrt{c}}} \geq \sqrt[n]{abc},$$

oricare ar fi numerele reale nenegative a, b şi c, este $n = 14$.

Gabriel Popa şi Paul Georgescu

Soluţie. Pentru început, demonstrăm valabilitatea inegalităţii pentru cazul $n = 14$. Formula de dezvoltare a binomului conduce la

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k} y^k \geq C_n^{n-1} x y^{n-1} = n x y^{n-1}, \forall x, y \in [0,\infty), \forall n \geq 2.$$

Avem:

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{a+\sqrt{b+\sqrt{c}}}\right)^{14} &= \left(a+\sqrt{b+\sqrt{c}}\right)^{7} \geq 7a\left(\sqrt{b+\sqrt{c}}\right)^{6} \\ &= 7a\left(b+\sqrt{c}\right)^{3} \geq 21abc \geq abc,\end{aligned}$$

de unde obţinem

$$\sqrt{a+\sqrt{b+\sqrt{c}}} \geq \sqrt[14]{abc}, \forall a, b, c \in [0,\infty).$$

.... **4p**

Demonstrăm acum că, oricare ar fi $n \geq 2$,$n \neq 14$, există valori $a, b, c \in [0,\infty)$ pentru care inegalitatea din enunţ este falsă. Considerând $a = x^2$, $b = x^4$ şi $c = x^8$, unde $x \geq 0$, un număr n care are proprietatea dorită trebuie să verifice inegalitatea

$$(\star) \quad x\sqrt{1+\sqrt{2}} \geq x^{\frac{14}{n}}, \forall x \in [0,\infty).$$

.... **1p**

Dacă $n < 14$, relaţia $(\star)$ conduce la

$$\left(\sqrt{1+\sqrt{2}}\right)^{\frac{n}{14-n}} \geq x, \forall x \in (0,\infty),$$

ceea ce nu este posibil (valorile mari ale lui x conduc la contradicţii). **1p**

Dacă $n > 14$, relaţia $(\star)$ conduce la

$$x^{\frac{n-14}{n}} \geq \sqrt{\sqrt{2}-1}, \forall x \in (0,\infty),$$

fapt care, din nou, nu este adevărat (valorile apropiate de 0 ale lui x conduc la contradicţii). **1p**

Concursul Gazeta Matematică şi ViitoriOlimpici.Ro
Etapa finală
Câmpulung Muscel, 17-22 august 2015

Soluţii şi baremuri – Clasa a XI-a

Problema 1. Fie $a \in (-1,1)$, $b \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}^*$ şi $c_i \in \mathbb{R}$, $0 \le i \le k-1$. Studiaţi convergenţa şirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definit prin $x_i = c_i$, $0 \le i \le k-1$ şi $x_{n+k} = ax_n + b$ pentru $n \in \mathbb{N}$.

Soluţie. Fie x soluţia ecuaţiei $x = ax + b$. Atunci $x_{n+k} - x = a(x_n - x)$, deci $x_n = a^{\lfloor n/k \rfloor} c_r + x$, unde $n = r \pmod k$. **4p**

Cum $a \in (-1,1)$, rezultă $x_n \to x$. **3p**

Problema 2. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$, cu $\det(A) = 0$. Demonstraţi că există $B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ astfel încât $C \neq O_n$ şi $A^m = B^m - C^m$, oricare ar fi $m \in \mathbb{N}^*$.

Soluţie. Cum $\det(A) = 0$, sistemele omogene $AK = O_{n,1}$, $K \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ şi $LA = O_{1,n}$, $L \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ au soluţii nebanale. Deoarece $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$, aceste soluţii pot fi luate cu elemente raţionale; prin înmulţire cu un factor convenabil, ele pot fi făcute să aibă coeficienţi întregi. Fie $C = KL \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$; avem $C \neq O_n$. **5p**

Deducem $AC = CA = O_n$, de unde rezultă imediat prin inducţie că $(A+C)^m = A^m + C^m, \forall m \in \mathbb{N}^*$, deci putem lua $B = A + C$. **2p**

Problema 3. Pentru orice funcţie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definim funcţia $g_f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ prin $g_f(x) = f(x - \sin x)$.

a) Demonstraţi că dacă g_f are limită în 0, egală cu $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, atunci f are limită în 0, iar aceasta este tot ℓ.

b) Demonstraţi că este posibil ca g_f să fie derivabilă în 0, dar f să nu fie derivabilă în 0.

Soluţie. a) Funcţia $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dată de $u(x) = x - \sin x$ este strict crescătoare şi surjectivă, deci are inversa v. Cum u este continuă, rezultă că v este continuă. **2p**

Din $g_f = f \circ u$ rezultă $f = g_f \circ v$, din continuitatea lui v deducem

$$\lim_{x\to 0} v(x) = v(0) = 0,$$

iar concluzia rezultă din teorema referitoare la limita unei compuneri de funcţii (observând că $v(x) \neq 0$ dacă $x \neq 0$). **2p**

b) Pentru $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $f'(0) = +\infty$, iar

$$(g_f)'(0) = \lim_{x\to 0} \sqrt[3]{\frac{x - \sin x}{x^3}} = \sqrt[3]{\frac{1}{6}}.$$

.... **3p**