

TENDINȚE INTERNAȚIONALE ÎN
EDUCAȚIA MATEMATICĂ ^{ff}

2016



Coordonator: Silvia Făt
Autorii, în ordine alfabetică: Mihail Bălună, Wladimir Boskoff,
Cătălin Gherghe, Radu Gologan, Doru Ștefănescu.



CUPRINS

Mesajul autorilor

I. Argument

1. Motivația studiului	4
2. Obiectivele studiului	5

II. Tendințe ale educației matematice în lume**6**

1. Rolul educației matematice	6
2. Curriculumul matematic	13
3. Practici de instruire	16
4. Testări standardizate	21
5. Formarea profesorilor	26
6. Motivarea în învățarea matematicii	30
7. Utilizarea tehnologiei	32

Anexa

Bibliografie

Lista tabelelor și figurilor

Mesajul autorilor

Societatea de Științe Matematice din România este autorul unor proiecte de succes în educația matematică. Înființată în 1910 sub numele de Societatea Gazeta Matematică, aceasta are 6500 de membri și 51 de filiale la nivel național. Fiind una din cele mai vechi societăți de matematică din Europa, este membru fondator al Societății de Matematică din Sud-estul Europei și membru al Societății Europene de Matematică.

Ne propunem să modificăm percepția socială asupra rolului matematicii în societatea noastră și să promovăm valorile educației matematice pentru toți. Studiul de față este și o declarație a convingerilor ce definesc concepția noastră despre educație. Dorim să trasăm încă o dată prioritățile în zonele cunoscute ca fiind critice și să facilităm colaborarea între cei mai buni practicieni – profesorii de matematică și cercetătorii din educație.

Inițiativa noastră presupune capitalizarea unor experiențe de succes, mai mult sau mai puțin posibile în contextul românesc. Enumerând o serie de provocări ale unui domeniu atât de vast precum educația matematică, încercăm să rămânem imparțiali, în ciuda admirației pe care o avem pentru o cultură sau alta.

Mulțumiri deosebite adresate Romanian American Foundation¹, care, printr-o susținere intensă, a făcut posibil acest exercițiu profesional. Ne dorim să punem bazele unei comunități mult mai vocale, care să exprime emoțiile și aspirațiile generației actuale de profesori și elevi, cu speranța că acestea vor fi concretizate în schimbările mult așteptate de ei.

¹ Romanian-American Foundation a fost înființată în 2009, ca un continuator al Romanian-American Enterprise Fund (RAEF), creat în 1994 de către Congresul Statelor Unite. Strategia RAF are trei obiective prioritare: dezvoltare economică în zonele rurale, inovație-tehnologie și implicare civică în România.

Scopul proiectului inițiat de Societatea de Științe Matematice și Romanian-American Foundation: propunerea de către un grup de practicieni a unor direcții concrete de acțiune, pentru optimizarea curriculumului matematic de nivel secundar, centrat pe reușita socială a elevului.

Scopul studiului: evocarea experiențelor de succes, prin care anumite țări s-au evidențiat în ierarhiile internaționale: S.U.A., Germania, Franța, Anglia, Australia, Japonia, Coreea de Sud.

Studiul de față este rezultatul unui efort colaborativ de documentare, dar și al analizei pe care o poate legitima experiența internațională a autorilor

I. ARGUMENT

1. Motivația studiului

Studiul de față descrie câteva experiențe internaționale relevante pentru educația matematică. Ne propunem să urmărim cum se construiește cultura matematică în lume și cum este ea valorizată de către școală. Bineînțeles, matematica este mai mult decât un obiect de studiu, și anume, un domeniu creativ, dezvoltat în timp ca instrument eficient în răspunsul la problemele științei/societății. Anumite culturi educaționale, nu multe, reușesc să confere matematicii *misiunea socială* pe care aceasta o are.

La o simplă căutare a termenului „math education”, Google ne oferă 34.000.000 de rezultate. Site-urile abundă în resurse educaționale, rapoarte, studii și analize, din care deducem că educația matematică este o construcție complexă, cu efecte cognitive, dar și economice foarte importante.

Studiul integrează și câteva concluzii selective ale cercetărilor evaluative ce au însoțit programele internaționale OECD² - Trends in International Mathematics and Science Study (TIMSS), Programme for International Student Assessment (PISA) și Eurydice.

Chiar dacă aceste experiențe sunt pentru noi un model de reușită, analiza bazată pe dovezi a acestor practici, ne relevă foarte multe dificultăți comune. Complexitatea acestor realități nu atenuează însă prestigiul pe care l-au dobândit la nivel mondial.

² Organizația pentru Cooperare și Dezvoltare Economică este cea mai mare agenție de statistică la nivel mondial. Este o organizație internațională formată din 34 de țări, fondată în anul 1961 pentru a stimula dezvoltarea economică și a promova politici sociale internaționale.

2. Obiectivele studiului

- 1. Vom include în analiza noastră spații educative diferite, relevante pentru calitatea optimă a educației matematice, chiar dacă acestea se distanțează major de cultura noastră;*
- 2. Vom evoca surse de optimizare a curriculumului matematic;*
- 3. Vom estima, în urma studiului, potențialul de valorificare a acestor experiențe pentru educația matematică din țara noastră.*

Ne dorim ca aceste elemente să depășească cadrul analizei argumentate statistic, întrucât suntem interesați de o interpretare calitativă nuanțată, adaptată realităților educaționale. Multe incertitudini sunt comune, intens problematizate în toate aceste contexte. Acestea pot fi redată prin întrebările de mai jos.

Întrebări esențiale

- Există, la nivelul sistemului de educație analizat, o concepție coerentă despre educația matematică? Dacă o asemenea viziune există, „laboratorul național” de curriculum a inclus propuneri și experiențe ale practicienilor?
- Există un follow-up din perspectiva tuturor tipurilor de rezultate așteptate în învățare, în special cea profesională?
- Ce tip de matematică predomină în spațiul educativ, matematica algoritmică sau cea creativă?
- Ce reprezentări sunt vehiculate în educația matematică de către actorii ei?
- Cum este integrată tehnologia în educația matematică?
- Care este formula ideală de formare profesională?
- Ce model instrucțional s-a preconizat inițial? Ce model folosesc în realitate profesorii?
- Ce modificări au adus evaluările naționale și internaționale asupra practicilor de instruire?

Beneficiarii acestui studiu pot fi atât decidenți, cât și designeri instrucționali și practicieni. În atenția noastră se află: cercetători educaționali, specialiști în proiectare curriculară în toate domeniile incluse în curriculum, autori de manuale/resurse digitale, profesori colaboratori ai Societății de Științe Matematice din România, profesorii de matematică din învățământul secundar.

Dedicăm efortul nostru, *elevilor*, sursa cea mai importantă a motivației noastre.

II. TENDINȚE ALE EDUCAȚIEI MATEMATICE ÎN LUME

Am identificat, în urma analizei experiențelor din SUA, Germania, Franța, Anglia, Australia, Japonia, Coreea de Sud, o serie de principii educative aplicate în aceste contexte locale. „Realitățile” diverse ne demonstrează faptul că nu există efecte similare ale acestor principii. De ce? Pentru că educația matematică este, în primul rând, un fapt variabil cultural.

Prezentăm o listă selectivă a tendințelor, anticipând efectele pe care acestea le pot avea asupra educației din țara noastră.

1. ROLUL EDUCAȚIEI MATEMATICE

Rolul educației matematice s-a schimbat, devenind un domeniu cu implicații sociale importante.

Educația matematică *de calitate și educația matematică pentru toți* par a fi două concepte/realități ireconciliabile. Rezultatele optime la evaluările internaționale sunt argumente pentru următoarea teză: succesul sistemelor de educație este dat de investiția în *educația matematică timpurie și de tip incluziv*, accesibilă în toate mediile sociale. Sursele reușitei în educație, așa cum vom vedea, sunt însă, multiple.

De la preconcepții la erori în practica instruirii

Din păcate, în educație, cele mai fervente contestări, dar și cele mai mari erori, sunt produse de proprii specialiști sau practicieni. Matematica a fost mult timp reprezentată, în spațiul educativ, ca o activitate solitară, ușor elitistă, independentă de tehnologie sau ruptă de problemele lumii reale. Mai mult, aceasta se autodefineste ca un exercițiu intens deductiv, în care raționamente incontestabile produc certitudini de tipul teoremelor sau axiomelor.

Astfel de preconcepții au afectat, în timp, modul în care matematica a fost percepută în școli. Anumiți profesori, actori ai unor sisteme de formare „încrămite” în paradigma

tradițională, cred că matematica este privilegiul unei categorii speciale de elevi. De ce se întâmplă acest lucru? Pentru că, în educație, psihometria - măsurarea prin teste de inteligență a capacităților elevilor, a produs daune ireparabile generații la rând: etichetare, segregare socială, excludere, elitism. Aceste efecte au devenit în timp, obstacole în educația matematică, surmontabile doar prin înțelegerea corectă de către profesori a rolului matematicii în viața elevului. Cei mai mulți profesori știu astăzi că: determinarea genetică a inteligenței nu este o fatalitate; învățarea este influențată de factori multipli, cei emoționali fiind extrem de importanți;

În sistemele de educație evocate, profesorii conștientizează faptul că matematica școlară are, pentru cei mai mulți „utilizatori”, o perspectivă socială, și pentru cei mai puțini, o valoare academică.

abilitățile cognitive se dezvoltă prin antrenament sistematic și nu prin învățarea în salturi; centrarea exclusivă pe performanță superioară este o gândire păguboasă etc.

Într-un raport din 2008³, autorii au observat că, în timp ce mai puțin de 0.5% din absolvenți s-au specializat în matematică și în

jur de 40% sunt utilizatori profesionali, 100% din elevi au nevoie de o matematică utilă, care să-i pregătească pentru deciziile din viața personală și socială.

1.1. Cultura matematică este o cale de acces către profesiile științifice.

În cazul performerilor de vârf, printre care **Australia, Franța și Anglia**, 82% din subiectele studiate în școală creează un cadru de dezvoltare a abilităților de bază pentru o viitoare profesie corelată cu științele. La nivel internațional, resurse substanțiale sunt dedicate comparabilității rezultatelor elevilor la testele standardizate, analiză posibilă prin includerea acelorași itemi în evaluări succesive. De exemplu, la PISA 2006 au fost evaluați aproximativ 500.000 de elevi cu vârsta de 15 ani, din 65 de țări OECD participante. Dintre aceștia, 18% din elevi sunt *top performers*⁴ la cel puțin o disciplină: științe, matematică și/sau lectură. Doar 4% sunt performanți în toate domeniile enumerate. Matematica, în opinia celor mai mulți, este domeniul cel mai important (vezi graficul de mai jos).

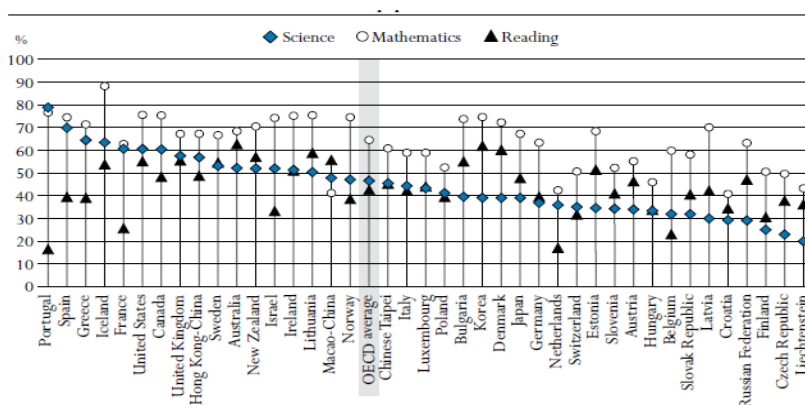


Fig. 1. Percepția elevilor despre importanța matematicii, științelor și lecturii. PISA 2006
Sursa: OECD Indicators (2009).

³ Petter Sullivan, *Teaching Mathematics: using informed teaching strategies*, ACER Press, 2011.

⁴ Competențe de nivelul 5 și 6 (scoruri mai mari de 606.99 puncte) ce aparțin celor ce pot identifica, explica și aplica cunoașterea în situații variate de viață.



În **Germania**, educația vocațională este bine reprezentată încă de la nivel secundar. Matematica este obligatorie în toate programele vocaționale. Un efect constatat în ultimii ani este creșterea numărului absolvenților de școli vocaționale care urmează studii universitare sau Fachhochschule⁵. Acest sistem dual creat de școală și piața muncii este un succes: 80% din elevii de nivel secundar urmează cursuri vocaționale. Toți elevii „vocaționali” fac matematică, iar cei din școlile în domeniul ingineriei, fac matematici avansate.

În **Anglia**, matematica este recunoscută ca una din căile de acces către profesiile științifice. Recent a fost lansată Rețeaua de Știință, Tehnologie, Inginerie și Matematică-STEMNET, un program coerent care implică școli, colegii, organizații locale, precum și mediul de afaceri. De asemenea, se discută la nivel oficial despre crearea unor strategii naționale de orientare a carierei tinerelor, în special, către aceste profesii, prin intermediul educației matematice.

În **Australia**, curriculumul oferă elevilor șansa de a studia matematica. De exemplu, australienii consideră că este esențial ca toți elevii să studieze algebra și geometria. NMAP⁶ arată că învățarea algebrei este condiție pentru reușita în finalizarea liceului. Slaba absolvire a liceului este corelată cu angajarea deficitară ca forță de muncă, respectiv subzistența. Se specifică faptul că studiul algebrei nu pune doar bazele matematicilor specializate, ci este unul din aspectele vocaționale importante ale educației.

În **Franța**, în anii anteriori, 42% dintre elevii care alegeau științele exacte la evaluarea finală, studiau la universitate, discipline precum matematica. Recent, fenomenul înregistrează o descreștere vizibilă, de chiar 15%. Filiera științifică din licee este cunoscută ca fiind „calea regală” spre universitățile prestigioase. Etapa Premiere crează un profil al absolventului apt să urmeze o carieră științifică. Ponderea studentelor se situează la nivelul a 35% din totalul studenților. De aceea, Franța încurajează fetele să urmeze studii în domeniile științifice prin intermediul unor campanii naționale de susținere.

Coreea de Sud a selectat, începând cu anul 2011, 23 de școli care să fie gestionate la nivel regional de departamentele de educație. Aceste școli au ca scop dezvoltarea și selectarea resursei umane în științe și tehnologie, ca viitori lideri în aceste domenii. Curriculumul conține discipline atât fundamentale, cât și puternic specializate, cele din urmă fiind destinate celor mai

⁵ Universitatea de Științe Aplicate, cu rang de instituție de învățământ superior.

⁶ National Mathematics Advisory Panel – raport de evaluare curriculară realizat în 2008 în Australia.

competenți elevi. La nivel național, în 2010, aici erau 907 instituții în care 3.283 elevi dotați urmau programe de matematică și 3.404 elevi erau înrolați în programe de științe.

Japonia, celebră pentru performanța în știință și tehnologie, acordă o atenție deosebită educației matematice. O cercetare din anul 2002, nu tocmai recentă, dar valabilă încă, releva faptul că peste 75% din elevi corelau matematica cu reușita socială. Educația științifică/tehnologică are o calitate excepțională, raportată la standardele internaționale, datorită următoarelor: standarde academice naționale ridicate, un cadru legal de suport pentru științe, matematică și tehnologie, suport inclusiv financiar (manuale gratuite, echipamente asigurate de guvern), studiul lecțiilor (“jugyou kenkyu”), publicarea planurilor de lecții și diseminarea lecțiilor filmate către un public larg.

Observație: Singurul domeniu din educația matematică, în care numărul elevilor și studenților a rămas constant, și, în unele țări, în creștere, este informatica. Matematica școlară s-a reanimat datorită informaticii.

1.2. Educația de gen - un trend internațional ce susține egalitatea de șansă

Cercetările comparative asupra segregării de gen sunt bazate, în general, pe ipoteza stratificării, ce specifică faptul că factorii structurali și culturali joacă un rol important în crearea acestor diferențe. Așa cum reiese din statisticile mondiale, un background socio-economic scăzut nu este însă o barieră pentru realizarea performanței optime la matematică. În țările menționate, 1/4 din performerii de top la testele internaționale provin din medii sociale modeste sau medii.

Există preconcepția conform căreia matematica este cultural neutră. Realitatea este însă aceeași și în educația matematică: există multiple stereotipuri culturale, de gen sau sociale ce duc la inegalități educaționale.

Societățile, evaluate diferit din punct de vedere economic, influențează, însă nivelul de participare a populației feminine în diferite arii de activitate. În majoritatea țărilor participante la astfel de evaluări, fetele au performanțe mai bune în timpul anilor de studiu, dar la aceste teste, nu (EACEA/Eurydice, 2010; OECD, 2004). În țările evocate, dacă procentul de *top performers* în Științe este foarte mic, dar similar (1.1% fete și 1.5% băieți), la Lectură, sunt mai multe fete decât băieți (3.7% fete și 0.8% băieți), iar la Matematică, mai mulți băieți decât fete (3.7% fete și 6.8% băieți). În Europa, studiile au evidențiat însă că diferențele legate de gen sunt mai mari în motivația și atitudinea față de matematică, și mai puțin la nivelul performanțelor.

1.3. Educația matematică încearcă să reflecte natura inter-, transdisciplinară a învățării

În literatura dedicată educației matematice se promovează tot mai mult ideea conform căreia *vocația matematicii trebuie să fie și una practică*. La baza acestei concepții se află *teoria învățării în context* (elaborată de Collins, Brown și Newman în 1987), care pune accent pe achiziția de cunoștințe/abilități în situații ce demonstrează cum acestea pot fi folosite în viața reală.

Matematica are valențe aplicative prin: *abilitatea de a explica logic, de a gândi structurat, de a face predicții, de a înregistra aspecte ale mediilor fizice sau interacțiunilor sociale, de a comunica în termeni cantitativi și spațiali, de a aplica soluții tehnologice*.

S-a constatat adeseori faptul că, deși elevii posedă cunoștințe matematice importante, acest lucru nu garantează și un transfer real al acestora. Dimpotrivă, se constată frecvent disocieri și rupturi între abstract și concret, între particular și general etc. O soluție poate fi dată de promovarea învățării integrate.

Subdomeniile matematice contribuie în mod complementar la dezvoltarea unei gândiri corecte și structurate. Numerația (P. Sullivan, 2011)⁷, de exemplu, este o temă din aritmetică, dar

Premisa aplicării matematicii este dată de dezvoltarea gândirii logice, structurate, deci de fundamente cognitive. O astfel de abordare trebuie încurajată, în special, în anii de educație obligatorie.

și un tip de informație integrată metodelor procedurale legate de estimări, raționamente, rezolvare de probleme. În plus, la nivel de obligații școlare, elevii au aceleași provocări: multiple conexiuni între conceptele matematice, formularea, înțelegerea și rezolvarea de probleme.

Programele OECD – PISA și TIMSS vizează competențele de tip integrat și aplicativ, fapt ce a modificat deja practicile instructionale în câteva țări. În cazul matematicii, așa cum am precizat anterior, se insistă pe: rezolvarea situațiilor-problemă, explorarea independentă, formularea de ipoteze, aplicarea raționamentului logico-matematic în situații uzuale.

Este importantă organizarea conținuturilor în module sau teme, prin care să se urmeze exigențele unui model de învățare integrată verificat. Cel mai des folosit este modelul învățării transdisciplinare al lui L. D' Hainaut⁸, care poate fi reprezentat cu succes în matematica școlară.

⁷ Petter Sullivan, *Teaching Mathematics: using informed teaching strategies*, ACER Press, 2011.

⁸ Acesta cuprinde următoarele rezultate ale învățării: exploatarea informațiilor, gândirea abstractă, adaptarea, utilizarea de metode, conducerea schimbării, creativitatea, predicția, competența proiectivă, organizarea științifică, rezolvarea



Curriculumul matematic din **Germania** deține următoarele principii, centrate pe gândirea inter-, transdisciplinară: rezolvarea de probleme din științele naturii și societate și modelarea unor fenomene ale acestora; dualitatea între gândirea deterministă și cea probabilistă; experimentarea ideilor prin dezvoltarea tehnicilor de gândire inductivă și deductivă; construirea mentală a demonstrației, axiomatizării și generalizării; istoria gândirii matematice.

În **Australia**, Australian Curriculum, Assessment and Reporting Authority (ACARA 2010), orientează cunoașterea matematică, la sugestia specialiștilor⁹, către cinci standarde, gândite ca trecând dincolo de spațiul matematicii :

- *înțelegerea conceptuală* - abilitatea de a explica concepte, operații și relații;
- *fluența procedurală* - set de abilități de utilizare a procedeeelor în mod flexibil și eficient;
- *competența strategică* - abilitatea de a formula, reprezenta și rezolva probleme;
- *raționamentul adaptiv* - capacitatea de a gândi logic, reflecta, explica și argumenta;
- *atitudinea productivă* - capacitatea de a aplica matematica în viață.

În **Japonia**, elevii conștientizează rolul esențial al comunicării în învățarea și utilizarea matematicii; gândirea și raționamentul matematic sunt dezvoltate prin formularea unor concluzii prin analogie sau inducție, acestea fiind apoi argumentate; este stimulată gândirea divergentă, dar este respectată și perspectiva soluțiilor multiple. Lecțiile din Japonia se evidențiază prin stimularea învățării prin problematizare (Hiebert et al., 1996)¹⁰. Astfel, *problema* devine contextul în care abilitățile sunt în mod complementar utilizate și dezvoltate. Lecția nu este centrată pe soluție, ci pe înțelegerea de către elevi a principiilor și proprietăților matematice.

În **SUA**, cadrul curricular variază în diferitele state, dar scopul comun declarat vizează aplicarea matematicii în viața reală.

În **Franța** (țară recunoscută pentru tradiția culturii generale a absolventului), conținuturile curriculare prezintă și geneza conceptelor matematice, fundamentul lor interdisciplinar, precum și aspecte din istoria matematicii.

În **Coreea de Sud**, obiectivele deschise ale educației matematice depășesc organizarea internă a disciplinei: dezvoltarea abilității de a gândi și comunica matematic pentru a explora

problemelor, gândirea explicativă, utilizarea limbajelor și a codurilor, gândirea selectivă, comunicarea eficientă, decizia, relaționarea cu mediul, evaluarea, acțiunea eficientă, învățarea eficientă, demonstrarea.

⁹ Killpatrick, Swafford and Findell, *Adding it up*, în Petter Sullivan, Teaching Mathematics: using informed teaching strategies, ACER Press, 2011.

¹⁰ Hiebert, J. Stigler, J. , *A world of difference* 25/4, Mathematics and Science, 2004.

fenomene și probleme diverse, construirea de soluții practice, stimularea atitudinii pozitive față de matematică.

În **Anglia**, unde curriculumul național a fost creat încă din 1988, s-a făcut recent trecerea de la un curriculum centrat pe conținuturi, la un curriculum aplicat. Astăzi, programele de matematică din ciclul secundar pun accent pe exersarea gândirii matematice în context. De asemenea, evaluările se raportează la învățarea prin acțiune (*learning by doing*) și învățarea de tip integrat.

Critici vehemente

Interesul pentru abordarea inter-, transdisciplinară este dat de cerința privind aplicabilitatea matematicii școlare. Cercetarea finalității practice a matematicii este realizată prin studii longitudinale, comparative sau de impact cerute de instituții internaționale. Din păcate, multe descriu inițiativele naționale în termeni critici. O astfel de finalitate nu pare a fi posibilă datorită modului în care este aplicat la clasă curriculumul. De exemplu, într-un astfel de studiu condus de Comisia Europeană, în 2007, se precizează:

- matematica este încă proiectată ca un act formal de predare, centrat pe memorarea regulilor și tehnicilor rezolutive;
- elevii nu corelează capacitățile cognitive exersate cu anumite cunoștințe matematice;
- exemplele sunt slab corelate cu lumea reală, iar aplicațiile matematice sunt stereotipe;
- tehnologia este rareori folosită;
- elevii manifestă extrem de puțină autonomie în învățare.

Criticile pot veni și din interiorul comunității educaționale. În SUA, curriculumul propus de National Science Foundation¹¹ a avut și el numeroase critici:

- programele din învățământul elementar stimulează elevii să creeze algoritmi aritmetici proprii, descurajând folosirea acelora standard superiori;
- folosirea calculatorului este excesiv recomandată, în unele cazuri acesta fiind inclus în activitățile de matematică în clasele mici;
- metoda de învățare prin descoperire în grup este folosită în exces și devine inefficientă;
- teme din statistica și analiza datelor sunt redundante de la un nivel de studiu la altul;
- definițiile și demonstrațiile matematice pentru clasele mai mari sunt inefficiente sau lipsesc.

¹¹ Fundația Națională de Științe din Statele Unite este o agenție guvernamentală americană ce susține procesele de cercetare și educație în toate domeniile non-medicale ale științei și ingineriei.

2. CURRICULUMUL MATEMATIC

Curriculumul matematic, deși orientat de repere normative, are o dinamică determinată de cerințe actuale.

Reformele în educație sunt reforme curriculare. Începând cu 2007, în țările analizate, accentul se pune pe rezultatele învățării în termeni de *competențe*, iar conținuturile trec în plan secundar, devenind mijloace pentru realizarea acestora. Pentru a facilita conexiunile între discipline, precum și aplicarea cunoștințelor, volumul conținutului educațional a trebuit să fie în mod considerabil redus.

În unele comunități educaționale, se fac presiuni în a reduce numărul orelor, dar și conținuturile matematice.

Conținuturile matematice și rezultatele învățării creează interacțiuni din cele mai interesante. Indiferent de modul în care interacționează, principala așteptare este, în termeni pedagogici, *cunoașterea operațională* (capacitatea de a folosi instrumente matematice pentru a rezolva situații de viață).

Interesul pentru curriculumul matematic este motivat de analizele cross-naționale ale performanțelor elevilor, ca surse importante de feedback. Un număr mare de studii evidențiază faptul că există diferențe notabile între SUA, Europa și Asia, la nivel de proiectare a curriculumului matematic, dar și în modul în care acesta este aplicat la clasă. Cu toate acestea, începând cu 2005, reformele naționale au inspirat și împărtășit simultan conceptul internațional de *mathematical literacy*¹².

Următoarele competențe sunt considerate importante la nivel mondial, cu o prevalare a unora în raport cu celelalte: 1. *gândirea matematică*; 2. *prezentarea și rezolvarea de probleme*; 3. *modelarea matematică*; 4. *raționamentul matematic*; 5. *reprezentarea entităților matematice*; 6. *utilizarea simbolurilor abstracte*; 7. *comunicarea în matematică*; 8. *utilizarea instrumentelor, inclusiv a celor digitale*.

¹² Capacitatea individuală de a înțelege rolul matematicii în lume, de a face raționamente corecte și de a folosi matematica în modul în care ea poate răspunde nevoilor individului ca cetățean activ, responsabil și reflexiv (OECD Report, 2009).



În **Coreea de Sud**, ultima formă a curriculumului își propune să stimuleze interesul elevilor față de matematică, prin simplificarea conținuturilor studiate și prin introducerea activă a tehnologiei. Tendința a fost cea de reducere a curriculumului per ansamblu, deși aceasta s-a materializat prin transferul conținuturilor la clasa următoare. Luând ca

În țările analizate, în jur de procentul de 40% din curriculumul obligatoriu pentru 12-14 ani, include trei domenii: lectură, scriere și literatură (16%), matematică (13%) și științe (12%). Alte domenii sunt limbile străine, studiile sociale, artele și educația fizică.

etalon curriculumul japonez, Coreea de Sud a redus cu o treime conținutul studiat în școală, prin diminuări succesive, în 2011 și 2015. Elevii au 4 ore pe săptămână din curriculumul comun, iar în clasele a XI-XII, au libertatea de a alege o anumită tematică. De asemenea, sunt create trasee de învățare diferențiată pentru elevi.

În **Australia**, curriculumul descrie detaliat conținuturile matematice, cărora li se asociază, pentru fiecare clasă, portofolii de nivel conform unor standarde graduale.

Resursele sunt foarte variate și conțin și exemple de lecții, teste și exerciții, precum și teme adiționale. Profesorii australieni observă faptul că, în practica zilnică, trebuie să parcurgă succesiv teme fără a le consolida suficient pe cele anterioare. Cei mai mulți cred că ar fi bine ca aceste conținuturi să fie reduse, dezvoltându-se doar temele importante. Întrucât există dificultăți legate de identificarea acestor teme centrale, o soluție ar fi realizarea unor interacțiuni între conceptele matematice complementare.

În **SUA**, studiile din anii '80 invocau calitatea scăzută a educației matematice. Printre rapoartele scrise în acea perioadă, două au atras atenția în mod special:

- *An Agenda for Action*, realizat de National Council of Teachers of Mathematics, care promova ca idee centrală „învățarea matematicii prin aprofundarea tehnicilor de „problem solving”.
- *A Nation At Risk*, care punea accentul pe stabilirea unor standarde privind competențele matematice și pe standardizarea testărilor în trecerea de la un ciclu la altul. Raportul pune problema slabei pregătiri academice a profesorilor și a „rescrierii” manualelor în termeni mult mai clari prin colaborarea între profesori universitari, profesori de liceu, matematicieni și membri ai societăților profesionale.

Oficialii din 48 de state au pledat în 2009, în aceeași țară, pentru standarde comune în educația matematică prin programul CCSSM¹³. Libertatea este aici un principiu aplicat. Elevii pot

¹³ Common Core State Standards for Mathematics este centrat pe un set de competențe clare, care permit învățarea conceptelor matematice în mod gradual și organizat, prin probleme din viața reală.

opta pentru anumite cursuri, profesorul având rolul de a orienta alegerea acestora, pornind de la nivelul abilităților. Școala optează pentru unul din programele propuse, asumându-și misiunea de a realiza setul de standarde cerute de către CCSSM.

În **Coreea de Sud**, se consideră că resursele de învățare au o calitate optimă, ce reflectă în mod corect cerințele la nivel de obiective de învățare și standarde de evaluare. Reactualizarea acestora este produsul experimentării in vivo. Se recomandă pilotarea curriculumului în 12 școli - un eșantion reprezentativ din punct de vedere școlar, dar realitatea arată că fiecare revizuire e dificil de realizat într-un interval atât de scurt de timp.

În **Germania**, la nivel secundar există peste 40 de curriculăe diferențiate la nivel de conținut educațional, dar orientate de standarde naționale unitare. Nu există, deci, un curriculum-nucleu. Profesorul are libertatea de a adapta conținuturile la nivelul claselor și profilului elevilor. Școala decide tipul de manual potrivit elevilor.

În **Japonia**, ca efect al standardelor internaționale, conținutul matematic al lecțiilor a devenit mult mai dificil decât în alte țări (de exemplu, în SUA). Lecțiile sunt puternic structurate, coerente, vizând dezvoltarea progresivă a conceptelor și, mult mai puțin, aplicarea procedeeleor. Ministerul Educației are un rol minor în selecția și aprobarea manualelor, fiind interesat doar de neutralitatea conținutului și de corespondența cu temele majore din programul de studii. Standardele naționale definesc, de asemenea, obiectivele și conținuturile matematice printr-o atentă corelare.

În **Franța**, după 2008, s-a recurs la reducerea conținuturilor și s-a consolidat strategia de învățare prin rezolvarea de probleme. După 2009, prin raportarea la standardele internaționale, au fost introduse teme noi, precum algoritmi matematici și probabilitățile. Au fost elaborate ghiduri didactice care să sprijine abordarea la clasă a acestor teme. Capacitatea de a argumenta și atitudinea critică față de rezultatul obținut sunt două aspecte importante în propunerea conținuturilor matematice. Statul francez susține acest deziderat prin resurse educaționale excepționale, elaborate de echipe de profesori experți, perfecționați și bonificați corespunzător

3. PRACTICI DE INSTRUIRE

Strategiile de învățare active, deși foarte populare, se regăsesc rareori în practicile de instruire la clasă.

Cercetările dedicate eficienței practicilor de instruire sunt frecvent realizate în țările evocate, devenind premise atunci când debutează anumite proiecte de schimbare. Aceste cercetări relevă în mod incontestabil efectele benefice ale învățării prin strategii active:

- ✓ *învățarea prin încercare și eroare:* permite utilizarea erorilor în realizarea și accelerarea progreselor. Eroarea nu mai este o sancțiune frustrantă de învățare, ci o parte a procesului de învățare, cu un important rol de feedback stimulat. Aceasta face posibilă explorarea soluțiilor creative prin utilizarea strategiilor „riscante”, dar și reconstrucția informațiilor;
- ✓ *învățarea prin proiect:* activitate de tip științific în care elevii explorează, asemenea cercetătorului, și prelucurează informații pe o temă relevantă pentru experiența lor de viață;
- ✓ *învățarea prin probleme:* presupune demonstrarea de cunoștințe tip „learning by doing”, în contexte ce permit transferul de cunoștințe;

- ✓ *învățarea colaborativă:* grupul este centrat pe un scop comun și produce un rezultat asumat.

Dezvoltarea culturii
matematice a elevilor nu
exclue natura socială a
învățării.

Raportul Eurydice¹⁴ arată că, în țările europene, deși strategiile de învățare colaborative sunt foarte apreciate pentru

efectele cognitive și sociale, lucrul în grupuri mici la matematică este puțin frecvent în raport cu studiul individual.



În **Anglia**, țară cunoscută pentru cele mai prestigioase școli, în analizele politicilor educaționale, se menționează cu sinceritate faptul că, de multe ori, predarea matematicii se realizează prin sarcini repetitive, verificabile prin automatisme. Percepția negativă asupra matematicii (centrate pe formarea prematură a ideilor) este prezentă și în rândul studenților, care descriu matematica academică ca fiind abstractă și, pentru mulți, inaccesibilă. Un raport din 2005 despre educația din Anglia concluzionează faptul că, deși profesorii se declară interesați de

¹⁴ *Învățământul matematic în Europa: Provocări comune și politici naționale*, Comisia Europeană, 2011 EACEA P9 Eurydice.

organizarea învățării active, activitățile matematice sunt, în mare parte, bazate pe receptare și memorizare (Swan, 2005)¹⁵. Lucrul în echipă este o metodă de învățare uzuală doar pentru 30% din elevii de clasa a VIII-a.

Școlile au autonomie în ceea ce privește gruparea elevilor în clase; în practică, majoritatea folosesc ca indiciu pentru grupare nivelul competenței. Instruirea diferențiată este însă extrem de prezentă, prin sesiuni de ratapare și îmbogățire, fie „unu-la-unu”, fie în grupuri mici, pe o perioadă de 12 săptămâni.

Cercetătorii în educație sunt interesați de efectivele claselor, ca urmare a segregării pe criteriul vârstei. Majoritatea cercetărilor sugerează faptul că reducerea numărului de elevi la clasă este importantă în educația timpurie. Chiar dacă cercetările evidențiază avantajul claselor cu efective mici, există și sisteme performante cu clase numeroase: în **Coreea de Sud**, raportul profesor/elevi este de 1/35 (media OECD este de 1/17).

În completarea instruirii în școală, foarte mulți elevi sunt înscriși în programul privat „after-school”. Acesta este unul din factorii invocați de rapoartele OECD - PISA ca fiind sursa reușitei celor mai mulți elevi. Lecțiile de matematică și științe au alocate un timp instrucțional standard, iar cursurile avansate sunt gestionate în funcție de caracteristicile fiecărui elev.

În **Franța**, principiul instruirii diferențiate se regăsește în mod notabil în practică. Suportul personalizat pentru cei cu dificultăți în învățarea matematicii se realizează organizat, în cadrul a trei stagii de pregătire în vacanțe. În cele cinci zile din săptămâna școlară, 3 ore pe zi sunt dedicate rezolvării problemelor dificile. Gruparea elevilor este coerent realizată, prin prezentarea de către profesor a unui proiect cu un anumit număr de ore, aprobat de către consiliul școlii.

În **Australia**, un studiu video realizat în urma TIMSS - Third International Mathematics and Science Study¹⁶ arată că 3/4 din totalul problemelor au un grad scăzut de complexitate; cele mai multe vizează *fluența procedurală*, primul și cel mai simplu reper din standardele australiene; se consideră că doar un sfert din probleme are legătură cu viața reală.

În **Japonia**, clasele au efective mari, de 35-50 de elevi, iar instrucția este preponderent frontală. Totuși, principala preocupare este participarea activă la oră, iar timpul folosit pentru expunere sau exersare de deprinderi este redus la minim. Clasa nu este împărțită pe niveluri, deci îi integrează pe cei cu abilități excepționale și dificultăți de învățare, cărora le sunt destinate trasee specifice de învățare.

¹⁵ Swan, M. *Improving learning in mathematics: Challenges and strategies*. Sheffield, England: Department of Education and Skills Standards Unity, 2005.

¹⁶ *Teaching mathematics in seven countries*. Results from the TIMSS, Video study from 1999, NCES, 2003.

Studii extrem de interesante sunt cele video. Cele anexate evaluărilor internaționale din 1995 și 1999, și-au propus, descriind tiparele de instruire, să identifice atât caracteristicile comune, cât și diferite ale lecțiilor de matematică (forme de organizare, tipologia problemelor, strategii de rezolvare, rolul profesorului etc).

Exemplul 1: Studiul video¹⁷ TIMSS (1995) oferă o imagine comparativă a trei din țările aflate în analiza noastră: Germania, Japonia, și SUA. Este cel mai amplu și ambițios studiu comparativ al practicilor de predare „in vivo” a matematicii, în cadrul a 231 lecții (100 în Germania, 50 în Japonia, 81 în SUA).

S-au remarcat rutine didactice în rezolvarea de probleme, astfel:

- în **Germania**, prezentarea problemei deschide activitatea cu întreaga clasă ghidată de către profesor, centrată pe dezvoltarea unor procedee de rezolvare preferate;
- În **Japonia**, prezentarea problemei pune bazele activității în care elevii soluționează, discută și împărtășesc tehnici de rezolvare;
- În **SUA**, se prezintă problema prin demonstrație de către profesor, urmată de execuția similară a elevilor.

Exemplul 2: Un alt studiu video¹⁸ oferă exemple reprezentative de lecții la clasa a VIII-a, pornind de la criterii legate de coerență, prezentarea problemelor și gradul de participare a elevului. Pe o scară de la 1 la 5, **Japonia** a înregistrat cel mai mare scor, iar **SUA** cel mai mic.

Modelul german	Modelul japonez	Modelul american
- revizuieste materialul anterior, prin tema pentru acasă sau reamintind elevilor ce au asimilat până la acel moment; - prezintă tema și problemele din acea zi; - dezvoltă procedeele, ghidând atent elevii în detaliile rezolvării; - exersează procedeele împreună sau individual pe probleme similare.	- revizuieste lecția anterioară printr-un scurt rezumat; - prezintă problema zilei, de obicei, o problemă construită pe cunoștințele recent verificate; - elevii încearcă să rezolve acea problemă, individual sau în grupuri mici; - împărtășesc metodele de lucru celorlalți; - rezumă tema centrală printr-o scurtă prezentare a profesorului.	- reactualizează lecția anterioară prin verificarea temei, - profesorul demonstrează cum se rezolvă un tip de problemă printr-o scurtă demonstrație a punctelor mai importante; - elevii exersează tipul de rezolvare pe un tip similar de problemă; - se verifică modul de rezolvare; - uneori, timpul este folosit pentru începerea temelor în clasă.

Tabel nr. 1. Tipare ale culturii predării. Sursa: Video Study, 1995.

¹⁷ *The TIMSS Videotape Classroom Study: Methods and Findings from an Exploratory Research Project on Eighth-Grade Mathematics Instruction in Germany, Japan and the United States U.S.* (1999), Department of Education Research Report 1999.

¹⁸ *Teaching mathematics in seven countries*, Results from the TIMMS, Video study from 1999, NCES, 2003.

În analiza noastră am regăsit o serie de similitudini între lecțiile germane și cele japoneze. Diferența principală cu lecțiile americane constă în modul de prezentare a formulelor: în Japonia și Germania formulele sunt dezvoltate în interiorul lecției, în SUA, acestea sunt prezentate într-o formă deja finită. În clasele germane, 23% din conținutul matematic e prezentat, iar 77%, dezvoltat. În cele japoneze, 83% este dezvoltat, iar în clasele americane, situația este chiar opusă.

Deși profesorii din SUA prezintă elevilor probleme de ambele tipuri (exersarea de deprinderi și realizarea de conexiuni între noțiuni), sunt diferiți față de colegii lor internaționali prin faptul că ignoră aspectul conceptual în discuțiile generate de problemă și, de cele mai multe ori, substituie munca elevului cu propria lor activitate. Se pare că aceștia folosesc doar 1% din timp pentru analiza relațiilor matematice. Ca efect al acestor practici, percepția elevilor privind dificultatea conținutului matematic, diferă, așa cum se vede mai jos:

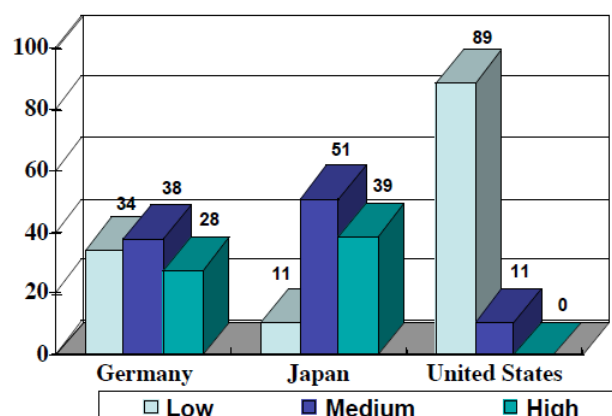


Fig. 2. Percepții asupra gradului de dificultate al lecțiilor de matematică în Germania, Japonia, SUA. Sursa: The TIMSS Videotape Classroom Study 1999, Department of Education Research Report

Critici:

Constatăm că, la nivel de rezultate ale învățării matematicii, sunt supraestimate fie deprinderile simple, fie înțelegerea conceptuală. În **SUA**, această discuție a devenit deja istorică (Loveless, 2001; National Council of Teachers of Mathematics, 2000; Kilpatrick, Swafford, & Findell, 2001).

Raționamentul științific, ca strategie cognitivă, este corect valorizat în teoriile învățării. Există însă o ruptură intens discutată de pedagogi, între știința și practica instruirii. K. Stacey (2010)¹⁹, în urma unei analize a strategiilor cognitive folosite în 17 țări, concludă că, în realitatea claselor de elevi, raționamentul științific este, de fapt, subreprezentat. În plus, profesorii au nevoie de resurse specifice predării raționamentului matematic. Aplicațiile din manualele

¹⁹ *Policy, Practice, and Readiness to Teach Primary and Secondary Mathematics in 17 Countries*
Findings from the IEA Teacher Education and Development Study in Mathematics (TEDS-M) 2011

americane, de exemplu, sunt deficitare, vizând în special derivarea de reguli ce urmează a fi folosite în exerciții, și nu strategii ale gândirii matematice.

Există, în toate contextele analizate, o serie de inovații la clasă. Formele în care acestea se manifestă depind însă de contextul cultural. Studii precum ICMI²⁰, ce vizează cultura matematică în țările occidentale și cele asiatice (Leung, Graf și Lopez-Real, 2006) sau lucrări populare precum *The Learner's Perspective Study* (Clarke, Keitel și Shimizu, 2006), compară practicile de predare din 12 țări. În toate aceste țări, nici o metodă de predare considerată a fi cea mai eficientă, nu apare ca fiind comună.

Profesorul este pus adeseori în situația de a se confrunța cu imprevizibilul, evaluând cu atenție potențialul ideilor elevilor. Aceasta necesită sarcini de învățare reactualizate și adaptate, ghidare, precum și un contract didactic clar. Se observă dificultățile pe care profesorii le întâmpină, în mare parte din cauza lipsei de pregătire în astfel de strategii noi. Astfel de elemente nu se regăsesc, în general, în practicile de formare a profesorilor. Atunci când profesorii pilotează strategii active prin improvizații, nu au niciodată rezultatele pozitive așteptate.

²⁰ International Commission on Mathematical Instruction (ICMI) este Uniunea Internațională a Matematicii, web: <http://www.mathunion.org/ICMI/>.

4. Testările standardizate

4.1. Testările internaționale sunt urmate de studii comparative și de cercetări evaluative naționale privind sursa reușitei/nereușitei.

Statisticile în educația matematică devin instrumente de susținere a unor politici naționale, posibile prin evaluările ce uniformizează condițiile de testare (standarde, conținuturi, modalități de aplicare etc). Ele permit și analize la scară largă, realizate în scop comparativ, la nivel internațional. Bineînțeles, acestea nu pornesc de la un background cultural similar, astfel încât realitățile evocate să fie înțelese complet: multe caracteristici aparțin tradiției și logicii interne a școlii. Testările standardizate oferă însă dovezi considerate reprezentative pentru competențele cognitive ale elevilor, iar scorurile obținute sunt buni predictorii pentru evoluția acestora.

Într-o publicație a Comisiei Europene se descrie realitatea existentă în multe sisteme de educație²¹: *”Încă tindem să evaluăm în special partea de „cunoștințe” din competențe, în vreme ce „deprinderile” și „atitudinile” esențiale pentru utilizarea creativă a cunoștințelor sunt mult mai dificil de testat în maniera tradițională.”*

O serie de țări angajează schimbări în curriculum în urma evaluărilor sumative. Așa cum se vede în graficele de mai jos, toate țările evocate au înregistrat o creștere notabilă a performanțelor TIMSS între anii 1995 - 2011.

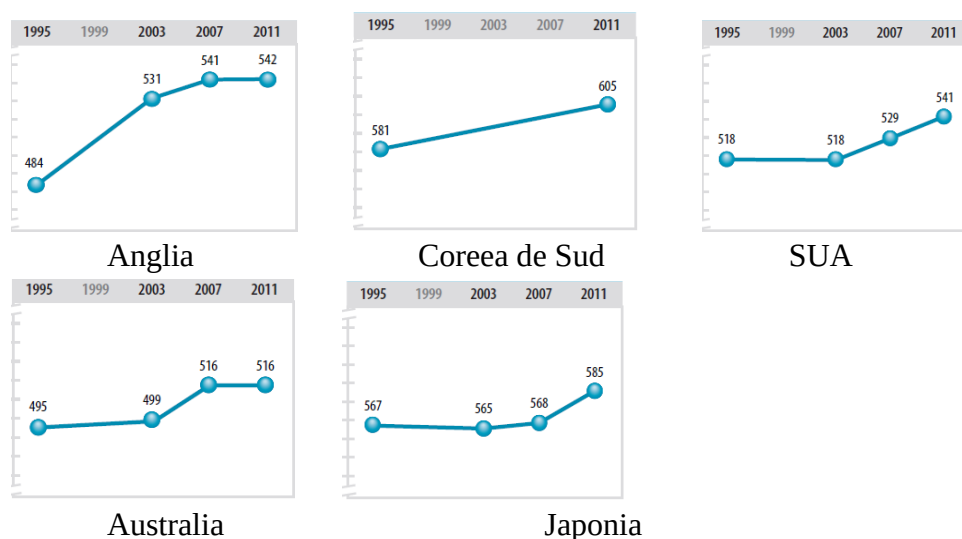


Fig. 3. Performanțele TIMSS la clasa a IV-a. Sursa: IEA's Trends in International Mathematics and Science Study – TIMSS 2011

²¹ European Commission Joint Research Centre (2009) *Measuring Creativity*, Bruxelles, 2009.



Referitor la performanțele PISA în perioada 2003-2012, nu există variații drastice, ci progresive. Constant, **Germania** și **Coreea de Sud**, alături de alte 10 țări, au redus ponderea performanțelor scăzute și au crescut ponderea celor înalte.

La matematică și la științe, scorurile sunt inferioare în majoritatea țărilor din Europa, comparabil cu Asia, Australia și America. Există însă exemple de bune practici, printre care **Germania**, care, din 2001, a dezvoltat strategii naționale care au făcut posibile progrese de la un ciclu de testare la altul. Se remarcă participarea motivată la studiile comparative internaționale, nu ca simplă prezență în analizele statistice, ci ca exemplu de dezvoltare educațională.

Anglia a participat la toate ciclurile de testare. Referințele internaționale ale evaluărilor sunt tot mai evidente în ultimii ani și se regăsesc în rapoartele de dezvoltare educațională, precum *The Importance of Teaching—The Schools White Paper 2010*. Departamentul de Educație a utilizat informații evaluative din cadrul TIMSS 2007 pentru a promova curriculumul din 2011. Aici, fiecare școală primește rezultatele la teste și, pentru un feedback cu rol motivațional, și rezumatul raportului național adresat profesorilor.

Specialiștii din **SUA** discută în cadre ample despre performanțele elevilor lor la aceste

Testările standardizate au modificat fundamental practicile de instruire. Există riscul ca acestea să vizeze doar rezultatele învățării conform standardelor evaluative, și mult mai puțin, nevoile de dezvoltare ale elevului.

teste și iau decizii centrate pe schimbare în funcție de acestea, în cadrul Common Core State Standards (CCSS). Experții se raportează la modele de curriculum performant, precum cel asiatic. Argumentul lor este acela că, adoptând standarde internaționale, absolvenții vor fi capabili să răspundă cerințelor competitive ale pieței muncii.

În **Australia**, rezultatele la TIMSS arată o stagnare de 16 ani. Pentru o țară atât de dezvoltată, nivelul performanței, deși peste media OECD, este considerat inacceptabil. Politicile educației din Australia au ca reper cultura asiatică. 11% din elevii australieni nu ating nivelul minimal al performanței matematice, iar 8%, la științe - la testele internaționale. Soluția gândită este dezvoltarea practicilor eficiente de predare, începând cu educația timpurie.

În **Franța**, la aceste teste, elevii francezi obțin puțin peste media de 500 de puncte, considerată acceptabilă la nivel oficial. Aceștia demonstrează în mod persuasiv cunoștințe de geometrie. Au însă dificultăți în a produce raționamente care conduc la generalizări.

Țările asiatice continuă să conducă clasamentele internaționale. **Coreea de Sud**, una dintre țările cu performanțele cele mai ridicate, are, la rândul ei, dezbateri despre riscul ca aceste performanțe să nu reflecte cu acuratețe abilitățile elevilor, ci să depindă de antrenamentul specific testării.

În **Japonia**, rezultatele la TIMSS sunt date relevante folosite în materialele de referință despre reformele curriculare, dar și ca suport pentru dezvoltarea practicilor de instruire. Centrul de Studii Naționale TIMSS este situat în cadrul NIER (National Institute for Educational Policy Research, facilitând accesul la toate statisticile existente. Japonia participă la aceste evaluări încă din 1999, dar recunoaște faptul că aceste testări nu au produs progrese notabile în instruirea la clasă.

4.2. Testările naționale oferă feedback și asupra calității curriculumului.

Într-un studiu relativ recent al Comisiei Europene²² se observă că: „*exceptând câteva țări, testarea națională este noua formă de evaluare a elevilor în Europa. Introducerea și utilizarea de teste naționale a început sporadic și a sporit semnificativ mai ales din anii 1990. După 2000, cele mai multe țări au început să se bazeze pe teste în scopul de a monitoriza și a îmbunătăți calitatea educației. În deceniul actual, unele țări se află în faza introducerii acestui sistem de evaluare, iar altele, al căror start s-a produs anterior, își dezvoltă în continuare sistemele naționale de testare*”.



Testările sumative capătă o importanță supraevaluată, considerăm noi. Se întâmplă astfel pentru că evaluarea normativă are mize sociale importante: orientarea profesională, absolvirea și certificarea.

În **Anglia**, educația obligatorie e de 11 clase (5-16 ani), timp în care elevii dau 4 serii de examene – Key Stage National Curriculum Tests. Rezultatele la teste condiționează continuarea studiilor. La 7 ani sunt testați la citit, scris și matematică; la 10/11 ani – la citit, scris, matematică și științe; la 13/14 ani – la engleză, matematică și științe. Testările în timpul anului sunt rare. Nu există o metodologie

²² Eurydice - *National Testing of Pupils in Europe: Objectives Organisation and Use of Result*, Bruxelles, 2009

națională privind evaluarea formativă la matematică, ci doar un ghid care să răspundă unor probleme practice.

Utilizarea testelor elaborate de profesori este cea mai frecventă practică. Legea Reformei în Educație din 1989 a crescut controlul centralizat asupra curriculumului școlar, dar a consolidat măsurile pentru responsabilizarea școlilor prin evaluarea națională.

În **Franța**, primul test național din 1979 a fost aplicat pentru a aprecia atât performanța elevilor în raport cu obiectivele programei, cât și diferențele de performanță între școli. Evaluarea este bine proiectată, în toate variantele ei: strategiile inițială, formativă și sumativă și tehnicile de inter- și autoevaluare. Până la vârsta de 16 ani, elevii trebuie să dezvolte anumite competențe în matematică, conform cadrului comun al celor 7 competențe. Elementele de cultură matematică, științifică și tehnologică sunt evaluate la 8 ani, 11 ani, 15 ani și fac obiectul unui bilanț al competențelor elevilor. Conform statisticilor, peste 22% dintre elevi nu posedă cunoștințe matematice legate de aplicarea lor în viața curentă. Peste 40.000 de elevi din fiecare an de studiu pot fi etichetați, prin raportare la norme, ca analfabeți-matematic.

În **Australia**, evaluarea națională este cunoscută prin abrevierea NAPLAN²³, derulată anual la clasele III, V, VII and IX, începând cu anul 2008. Nivelul de competență al elevilor la sfârșitul clasei a X-a este modest, comparabil cu alte țări: aceștia dețin cunoștințe relativ simple, cum ar fi descompunerea în factori a unui polinom de gradul al doilea, calculul unor arii sau recunoașterea unor relații de paralelism ori perpendicularitate.

În **Japonia**, SNEA²⁴ analizează nivelul rezultatelor învățării, având ca scop continua optimizare a curriculumului. Performanțele academice sunt evaluate spre sfârșitul anului școlar la nivel național, la limba maternă și matematică, pe eșantioane sau integral, la clasele a VI-a și a IX-a. Evaluarea curriculumului se face înainte și după schimbarea acestuia, la limba maternă, științe sociale, matematică și engleză, pe eșantioane, la clasele V-IX. Statisticile sunt popularizate în presă, astfel încât ierarhia școlilor pe baza rezultatelor, să fie cunoscută.

Și în **SUA**, evaluarea este standardizată. Majoritatea itemilor sunt de tip grilă, elevul alegând răspunsul corect din variantele oferite. 25% din subiecte vizează aflarea corectă a răspunsului, validată de demonstrația aferentă. Elevii primesc toate formulele necesare rezolvării subiectelor.

Programele eficiente de formare a profesorilor au determinat, în SUA, creșterea rapidă a ponderii elevilor cu performanțe superioare la testările standardizate, de la 25% la 74% la matematică.

²³ National Assessment Program - Literacy and Numeracy

²⁴ Serviciul Național de Evaluare Academică

În **Coreea de Sud**, pentru a evalua calitatea curriculumului național, evaluarea națională²⁵ este realizată anual, rezultatele fiind făcute publice pe site-ul www.schoolinfo.go.kr. Școlile cu performanțe slabe sunt susținute economic de către guvernul coreean. Pentru a fi admiși la universitate, elevii coreeni trebuie să treacă un test de abilități important - College Scholastic Ability Test (CSAT), la terminarea clasei a XII-a. Acesta a devenit normă în selectarea viitorilor candidați. Accesând universități prestigioase, studenților li se oferă oportunități de carieră notabile.

În **Germania**, testarea națională a fost introdusă în 2005, pentru a facilita acordarea de certificate și trecerea la următorul ciclu de învățământ. Examenele sunt proiectate și administrate la nivel local. Valoarea lor vocațională este evidentă. Certificatul acordat la finele învățământului secundar (Hochschulreife) este cunoscut sub numele *Abitur*. Posesia unui asemenea certificat constituie o condiție necesară și suficientă pentru admiterea în învățământul superior. Pe lângă limba germană, matematica ocupă un loc central în cadrul acestui examen. Abitur-ul „general” sau „specializat” poate fi obținut la finele Gymnasiumului (anul 13 de studiu), care constituie filiera academică de studiu.

²⁵ National Assessment of Education Achievement (NAEA)

5. FORMAREA PROFESORILOR

În toate sistemele de educație, formarea profesorilor rămâne un aspect critic, intens discutat, în special atunci când sunt explorate efecte cumulative.

Începând cu 2005, rapoartele OECD, ce includ toate țările vizate aici, menționează o serie de tendințe negative în profesia didactică: fenomenul îmbătrânirii, ascendența modelului profesional feminin și slaba corelare între perfecționarea profesorilor și nevoile lor concrete.

Variațiile în formarea profesorilor sunt efectul opiniilor divergente în comunitatea educațională. Problemele cel mai des invocate fac referire la relația dintre teorie și practică, precum și la importanța disciplinei în raport cu pedagogia aplicată acesteia. De aici, provocarea încă actuală, de a realiza un echilibru între specializare, metodică predării și practica didactică.

Tradiția formării academice persistă și în cele mai evolute sisteme. Aceasta este intens corelată cu specificul disciplinei și mai puțin cu didactica aplicată. Totuși, se recunoaște valoarea practicii în țările analizate, întrucât până la 2/3 din formarea inițială este realizată prin practică.

Programele de formare a profesorilor de matematică sunt fie simultane, fie consecutive:

- *programele bazate pe simultaneitate* (SUA) oferă, în același timp, pregătire în specializarea matematică și pedagogie, precum și alte cursuri conexe;
- *formarea consecutivă* presupune

parcursul studiilor universitare în specializare, urmate de program centrat pe pedagogie și pregătire practică;

- Există și un al treilea tip de programe, foarte popular în SUA, *bazat pe predarea în școală (school-based program)*.

Calitatea formării este vitală. Studii longitudinale ne arată că performanțele egale ale elevilor la vârsta de 8 ani cresc cu aproximativ 50 % mai târziu, la vârsta de 11 ani, dacă aceștia au profesori bine pregătiți.

În sondajul SITEP²⁶ din 2011, realizat în 37 de țări, trei mari categorii de competențe sunt recunoscute ca fiind vitale, acestea fiind exersate diferit de către profesorii din învățământul primar (*profesori generaliști*) și profesorii din secundar (*profesori specializați*). Acestea sunt:

²⁶ Survey on Initial Teacher Education Programmes in Mathematics and Science, Eurydice, 2011

a. Cunoașterea curriculumului și abilitatea de a predă matematica:

- Creează un spectru larg de situații de predare;
- Utilizează metode bazate pe explorare și problematizare;
- Utilizează tehnologia;
- Explică aspecte socio-culturale asociate matematicii/științelor;
- Folosește tehnici de învățare personalizată;
- Evaluează folosind metode alternative (portofoliul).

b. Confruntarea cu diversitatea:

- Includ în rezultatele învățării o gamă diversă de abilități matematice/științifice;
- Utilizează instrumente de diagnostic pentru identificarea timpurie a dificultăților;
- Analizează convingerile și atitudinile elevilor față de matematică/științe;
- Evită stereotipurile de gen atunci când interacționează cu elevii.

c. Colaborarea între colegi și cercetarea în domeniu:

- Aplică rezultatele cercetării în practica didactică curentă;
- Colaborează în folosirea strategiilor didactice inovative;
- Dirijează cercetarea pedagogică.



Anglia deține cele mai prestigioase școli din Europa. Aici, profesorii stagiați trebuie să promoveze teste de abilități în numeratie și TIC, precum și deprinderi de bază în asumarea rolului profesional. Ca rezultat al reformei Williams din 2008, programul *Profesorul specialist de matematică* a propus, ca până în 2019 să existe câte un specialist în matematică în fiecare școală elementară. Se pune accent pe perfecționarea continuă, cu o cerință obligatorie de 30 de ore pe an. Profesorii sunt invitați să se înscrie în cel puțin una dintre asociațiile profesionale dedicate didacticii, unde să confirme, prin propuneri inovative, experiența pedagogică, centrată pe demonstrarea abilităților de evaluare, precum și de cercetare aplicativă la clasă. Unul din standardele profesionale este legat de abilitatea de a evalua eficiența predării și identificarea unor zone de dezvoltare²⁷.

Inițiativele de dezvoltare sunt numeroase. Centrul Național de Excelență pentru Didactica Matematicii (NCETM) își propune să răspundă aspirațiilor profesorilor de matematică, stimulând învățarea colaborativă din bune practici diseminate la nivel local și regional.

²⁷ Instituții precum Initial Teachers Education (ITE) furnizează un set de criterii clare pentru aceste autoanalize.

Cu toate acestea, într-un raport al Royal Academy²⁸, aflăm faptul că „profesorii englezi au mai puțin prestigiu decât colegii internaționali, iar profesia didactică este o opțiune prea puțin tentantă pentru tinerii absolvenți”. Cifrele din 2013 (School Work Force Census) arată că e insuficient numărul profesorilor calificați în matematică, fizică, chimie, informatică, în unele comunități, necesarul fiind chiar de 50%.

În **SUA**, sistemul de formare este puternic descentralizat. Viitorii profesori urmează studiile de licență în cadrul colegiilor acreditate de 4 ani sau în universități. Licența trebuie să fie obținută în domeniul educației. Un loc important îl deține practica bazată pe observarea lecțiilor de matematică/informatică din liceu și programele de tutoriat. Viitorul profesor de matematică trebuie să participe la examene centrate pe rezolvarea de probleme. Există state care angajează ca profesori, persoane licențiate în alte domenii decât cele educaționale, urmând ca, în primii ani de profesie, aceștia să obțină licența în educație. Pentru predarea la liceu, în anumite state, se cere absolvirea unui master în primii ani de carieră didactică. De remarcat, formarea în specializarea matematică nu este obligatorie.

În **Franța**, profesorii sunt formați în universități. În timpul pregătirii, pot face stagii de

Este necesar ca profesorii să conștientizeze faptul că ei înșiși pot genera o cultură a predării/a dezvoltării. Este nocivă obediența acestora atunci când încearcă în mod invariabil să „implementeze” indicațiile experților.

predare la clasă sub supravegherea unor profesori cu experiență. Ca profesori stagiați la terminarea studiilor sunt distribuiți pentru un an într-o instituție școlară, unde sunt monitorizați și susțin o evaluare complexă. Pentru a preda la nivelul gimnaziului, profesorii trebuie să absolve un examen organizat la nivelul inspectoratului regiunii.

Pentru a preda la nivelul liceului, profesorul francez trebuie să mai susțină

două examene, unul numit CAPES²⁹ și altul numit Agrégation³⁰. Absolvenții demonstrează cunoștințe de bază de matematică și metodică predării, cunoașterea programelor, dar și o concepție asumată despre relația matematicii cu alte discipline. Începând din 2011, pentru a se înscrie la concursurile de titularizare, absolvenții de universități trebuie să aibă studii de masterat.

²⁸ *Vision for Science and Mathematics Education*, The Royal Society Science Policy Centre Report 2014

²⁹ Abreviere pentru: le certificat d'aptitude au professorat du second degré

³⁰ Grad superior, obținut selectiv de către profesorii francezi după absolvirea unui master, care pot preda în licee sau școli superioare.

În țări precum **Germania** și **SUA**, profesorii de matematică sunt pregătiți și pentru predarea la clasele primare. În școlile secundare, specializarea a devenit o normă, deși în multe cazuri, această normă presupune predarea a două obiecte de învățământ, de obicei, matematică și științe.

În **Germania** sunt necesare studii universitare de 5-6 ani, inclusiv, studii masterale, doi ani de stagiatură (*seminarul practic*), urmați de alte două examene de titularizare. Investiția consistentă în formare are ca efect crearea unui statut social remarcabil. Programul de formare este asemănător celui din România, însă există o mai mare pondere de științe sociale și educaționale. Pregătirea în metodică predării matematicii se îmbină cu stagii de practică în școli. Salariile sunt mai mari decât în țările OECD, nu și competitive cu salariile absolvenților de studii superioare din sectorul privat. Totuși, profesia didactică este înalt selectivă, bine recompensată și percepută ca având prestigiu social.

În **Japonia**, profesia didactică are un statut social elevat, aspect reflectat și în procesul de selecție, în cadrul căruia concurează, în medie, 7 solicitanți pe un post. Viitorul profesor urmează un program de formare la universitate structurat pe credite, după care obține un certificat specific nivelului de predare. O parte importantă a acestor programe este reprezentată de practica în școală. După angajare, se face un an de „ucenicie”, supervizată de un profesor cu experiență.

În **Australia**, profesorii obțin diploma de licență în domeniul matematicii. Pentru a avea și o anumită deschidere culturală, pe lângă cursurile de specialitate, aceștia aleg patru discipline auxiliare dintre: arte media, arte vizuale, dans, drama, muzică, design și tehnologie, engleză, științe etc. Ulterior, urmează un program masteral (*master of teaching*). Procentul profesorilor de matematică calificați pentru a predă în învățământul secundar este de doar 7%, pe când timpul alocat matematicii în curriculum dublează acest procent. Invocăm aici două aspecte critice: lipsa de pregătire matematică a profesorilor de învățământ primar și nevoia de calificare pentru profesorii de nivel secundar. Există un efort coordonat la nivel național, o primă măsură fiind dată de programul *Teach Next* – pregătirea viitorilor profesori; o alta privește oferta de bonificații profesorilor necalificați pentru a continua studiile.

În **Coreea de Sud**, profesorii sunt absolvenți ai colegiilor de educație de 4 ani sau ai Universității de Educație Națională, în care este obligatoriu stagiul de practică. După formare, profesorul este calificat ca având gradul al II-lea. Pentru a predă în școlile publice, sistemul de examinări anuale este foarte riguros și realizat în etape, centrate pe conținut științific, cunoaștere pedagogică și proiectarea didactică a activităților. Viitorii profesori sunt selectați din rândul celor mai buni absolvenți (1/3). Dezvoltarea profesională este o prioritate: cel puțin 10% din timpul profesorului este dedicat activităților de perfecționare.

6. MOTIVAREA ÎN ÎNVĂȚAREA MATEMATICII

Există un interes crescând pentru strategii naționale de motivare în învățarea matematicii.

În ultimii ani, o serie de studii educaționale atrag atenția asupra unui declin alarmant în ceea ce privește interesul pentru educația matematică. La nivel mondial, așa cum reiese din (meta)analiza celor mai multe cercetări, deciziile educaționale aplicate pentru combaterea performanței scăzute sunt legate de:

- fixarea fundamentelor în învățarea matematicii (educația timpurie);*
- suport constant pentru diminuarea dificultăților de învățare ale elevilor;*
- stimularea motivației prin conexiuni relevante cu alte discipline;*
- implicarea părinților în procesul de învățare.*

În toate aceste contexte, sunt posibile diagnoze ce explică nivelul performanțelor. O cauză frecvent invocată face referire la motivația pentru învățarea matematicii. În graficul de mai jos, marcate cu roșu regăsim țările în care s-au făcut studii despre motivația în învățarea matematicii.

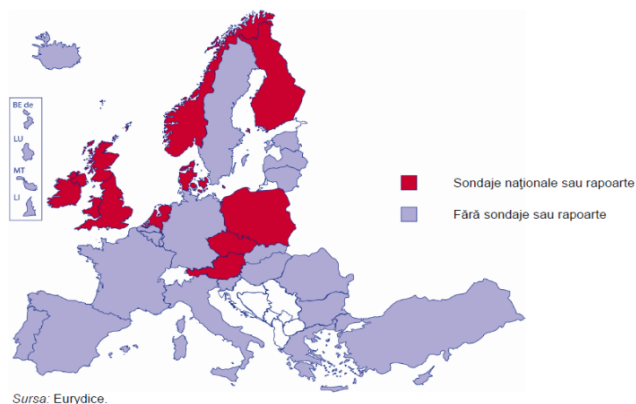


Fig. 5. Cercetări despre motivație în învățarea matematicii. Sursa: Eurydice, 2011

Realitatea demonstrează că nivelul motivației descrește progresiv pe parcursul anilor de studiu. Elevii resimt perioada gimnaziului ca fiind cea mai vulnerabilă. Aceștia își formează acum o imagine despre propriile abilități și interese, ceea ce influențează decisiv performanțele matematice ulterioare. De aceea, motivarea în învățarea matematicii este o adevărată provocare pentru profesori. Resursele de învățare trebuie să fie atractive pentru a reduce efectele cognitive ale demotivării.

Există o literatură amplă dedicată anxietății la ora de matematică. Ultimul studiu asupra testelor PISA (2012), în care apar o serie de opinii ale elevilor despre nivelul de încredere, emoționalitate, conține o statistică relativ asemănătoare: 30 % din cei chestionați manifestă anxietate pe parcursul a cel puțin un an de studiu la matematică. Buckley (2013), în urma

analizei mai multor studii, concludă că 20% din populația școlară din **SUA** declară că este timorată de cerințele acestei discipline.



În **Germania** și **Franța** s-au înregistrat cele mai mari niveluri de anxietate, conform statisticilor OECD din 2004. Aceleași țări însă sunt recunoscute pentru interesul crescut față de competițiile la nivel național. În **Germania**, acestea sunt organizate în timpul anului școlar, de-a lungul a trei sesiuni. În **Franța** există peste 20 de astfel de concursuri.

În **Coreea de Sud**, elevii asimilează cunoștințe organizate în jurul temelor de evaluare, fără a demonstra un interes intrinsec. Deși **Coreea de Sud** are performanțe notabile la evaluările TIMSS și PISA, atitudinea față de matematică nu este una pozitivă, conform studiilor calitative ce au însoțit aceste evaluări. În plus, există o diferență imensă între rezultatele din mediul urban și cel rural, în special din cauza diferenței de atitudine.

Eșecul școlar are oriunde în lume un efect cumulativ: de exemplu, în **Anglia**, elevii care eșuează la 11 ani, au 25% șanse să reușească la 14 ani și 6% șanse să reușească la 18 ani. Rolul motivațional al instruirii este vital; nu este importantă vârsta la care copilul începe școala. În țările în care școala începe la vârsta de 7 ani, elevii obțin rezultate foarte bune la matematică la vârsta de 15 ani.

Traseele diferențiate au, de asemenea, un rol de stimulare a motivației în învățare. În **SUA**, NSF a propus demararea unor proiecte matematice suplimentare care să susțină elevii și profesorii în alegerea strategiei eficiente pentru atingerea standardelor educaționale: *Connected Mathematics*, *MathScape*, *MATHThematics-STEM*, *Contemporary Mathematics in Context*, *MATH Connections*, *Mathematics: Modeling Our World (ARISE)*, *SIMMS Integrated Mathematics: A Modeling Approach Using Technology*.

Australia este recunoscută pentru gradul de încredere al elevilor în propriile competențe matematice (78%), peste media internațională (76%).

Prestigiul mondial este un obiectiv național intens motivat. 20% dintre premianții Fields, echivalentul premiului Nobel în matematică, provin din **Franța**. Până în 2013, 11 dintre cei 52 de medaliați erau francezi. Rolul ENS - Școlii Normale Superioare este fundamental în acest sens. Performanțele echipelor **SUA** la concursuri și olimpiade sunt foarte bune în ultimii ani. Echipa SUA se află printre câștigătorii recentii ai Olimpiadei Internaționale de Matematică.

Măsurile cu rol motivațional cel mai des aplicate în sistemele de educație evocate vizează parteneriate cu universități, stagii de practică în companii, activități educative în afara școlii etc.

7. UTILIZAREA TEHNOLOGIEI

Crește interesul pentru utilizarea tehnologiei în educația matematică.

Tehnologia oferă oportunități multiple de proiectare și utilizare a aplicațiilor de învățare în orice disciplină școlară. Deși argumentele pentru utilizarea tehnologiei în învățare sunt multiple, toate aceste valorizări sunt condiționate de modul în care sunt respectate principiile de proiectare a învățării. Și în domeniul matematicii, TIC poate transforma ideile în „materie”; de asemenea, face posibilă înregistrarea activității/produsului ei și are un potențial adaptativ apreciat de către profesori prin alerte cu rol de feedback imediat, alternative și răspunsuri selective.

Posibile avantaje TIC în educația științifică:

colectare de date pentru proiecte științifice; interacțiuni virtuale cu alți elevi, profesori, specialiști; simulări și modelări, rotația și manipularea obiectelor; măsurarea, dinamica relațiilor dintre componente; organizare și reprezentare grafică (sisteme de cartografie și topografie, sisteme economice, meteorologice, etc.); experimentarea unor fenomene fizico-chimice imposibil de realizat; exploatarea unui model în care anumite elemente sunt parametri variabili și prin care se modifică calitățile intrinseci s.a.

Adeseori, elevii pot folosi resursele digitale ca „proteză” cognitivă, suport pentru sarcini pe care aceștia ar trebui să le realizeze în mod autonom. Calitatea resurselor digitale și medierea profesorului sunt vitale în acest sens.



Folosirea calculatoarelor în

Australia are o frecvență considerabilă. Conform raportului național TIMSS 2007, dacă în clasa a IV-a, 95% din elevii folosesc calculatoarele la ora de matematică, în clasa a VIII-a, procentul crește. Pentru 99 % din elevi, matematica este predată în clasă și nu în laborator, iar calculatoarele sunt instrumente

uzuale folosite pentru a verifica corectitudinea răspunsurilor, a rezolva probleme și a dezvolta concepte matematice. *Digital Education Revolution* este instituția care contribuie la integrarea tehnologiei în școli.

În **Anglia**, introducerea tehnologiei este prevăzută în curriculumul matematic național. Este asigurat accesul la Internet, există suport tehnic generalizat. Numărul calculatoarelor per elev variază la nivel regional. Tabla interactivă este însă foarte populară în rândul tuturor profesorilor și elevilor.

În **Japonia**, este vital ca elevii să dezvolte abilitatea de a răspunde în mod autonom solicitărilor unei societăți cu o tehnologie avansată. În 2004, *e-Japan Priority Policy Program Plan* cerea tuturor școlilor să dețină calculatoare și acces la Internet până în 2005. În 2011,

școlile din Japonia aveau un calculator la 6 elevi și 82% din clase aveau conexiune LAN. Programul *The Course of Study for Lower Secondary Schools* conține direcții de optimizare a activităților de învățare prin TIC. Elevii își formează abilități digitale prin folosirea abacului (*soroban*), urmând ca, în școala secundară, să devină competenți din punct de vedere digital la nivelul tuturor disciplinelor (pentru documentare, procesare de date, observare, înregistrarea măsurătorilor din cadrul experimentelor).

În **Franța**, au fost create ghiduri metodice pentru profesori în vederea utilizării instrumentelor digitale la matematică. Există un interes deosebit pentru aplicații de rezolvare a problemelor cu cerințe matematice, dar care provin din alte domenii și care pun accent pe înțelegerea rezolvărilor și interpretarea rezultatelor.

În **Germania**, nu există o politică națională unitară privind integrarea tehnologiei în educație. Echipamentele informatice sunt disponibile în 2/3 din școli. În cele mai multe landuri, curriculumul matematic include și câteva direcții privind utilizarea calculatoarelor. Manualele de matematică din ultimii ani fac apel la softurile analogice dedicate acestora, profesorii având libertatea de a include în lecții aceste aplicații. Profesorii încurajează elevii să folosească calculatoarele, dacă, bineînțeles, software-ul nu contrazice concepția curriculumului. Aici a fost inclusă și o disciplină nouă, *Media ca sursă de informare*.

În **Coreea de Sud**, utilizarea tehnologiei este un obiectiv ferm în educația matematică, concretizat în ponderea obligatorie de 10-20% din durata lecției. Calculatoarele sunt recomandate nu doar pentru a efectua calcule complexe, ci pentru a dezvolta gândirea elevului prin înțelegerea conceptelor, principiilor și legităților și rezolvarea de probleme.

În **SUA**, învățarea digitală a cunoscut un proces de expansiune în ultimii ani. Dacă în 2000, vorbim de un raport de 1 calculator/7 elevi, în 2008, raportul este de 1/3. Încă din 2009, 94% din școlile publice aveau acces la Internet. Aici este deja legitimă ideea conform căreia tehnologia are un impact real, în primul rând, asupra modului în care se poate desfășura instruirea în clasă.

CONCLUZII

Sintetizând, constatăm că educația matematică are un scop comun declarat la nivel mondial: *să construiască o cultură necesară înțelegerii vieții și societății*. Fundamentul educativ al școlii constă în transmiterea acestei culturi matematice tuturor elevilor, ca parte a unui capital social.

În urma explorării noastre în aceste spații educative, concluzionăm că:

1. Orice curriculum național, oricât de altruist ar fi, nu este un panaceu. Acesta poate fi corect proiectat, conform unor principii științifice; definatorii sunt însă practicile educative.
2. Cultura matematică este corelată cu educația științifică și dezvoltarea tehnologică, obiective importante ale sistemelor de educație din lume.
3. În sistemele analizate, există o corespondență între curriculum și evaluare, cel puțin la nivelul proiectării lor. Eforturi remarcabile sunt orientate către optimizarea acestora.
4. În fiecare spațiu educativ, criticile cele mai vehemente vin din interiorul comunității educaționale. Vocea profesorului este însă bine reprezentată prin organizații profesionale și societăți științifice.
5. Schimbările în curriculumul matematic au ca fundamente standardele testărilor internaționale, dar și mai important, cerințele pieței muncii, în scopul creșterii competitivității naționale.
6. Cercetarea educațională sprijină în mod concret dezvoltarea curriculumului matematic. Cu toate acestea, am remarcat același paradox: diferitele inovații curriculare nu sunt clar demonstrate *in vivo* în rutinele didactice, deși ele apar constant în discursul pedagogic (al specialiștilor) și declarativ (al profesorilor).

Anexa 1.

**Exemple de programe matematice pentru învățământul secundar:
SUA, JAPONIA, COREEA DE SUD, FRANȚA.**

Statele Unite ale Americii

Domeniul	Justificarea domeniului	Conținuturi/standarde de performanță
1. Numere și cantități	Conștientizarea folosirii unităților în modelare și aplicarea în viața de zi cu zi: accelerația, conversia valutară, temperatura zilnică, estimări de tipul “per-capita”.	1. <i>Sistemul numerelor reale</i>: să înțeleagă extinderea exponenților de la numere întregi la numere raționale și să poată folosi proprietățile numerelor raționale și iraționale. 2. <i>Cantități</i>: să poată raționa “cantitativ” și să poată folosi unități în rezolvarea problemelor. 3. <i>Sistemul numerelor complexe</i> <i>Standarde minimale</i>: să opereze cu numere complexe (fără împărțire), să rezolve ecuații de gradul al II-lea cu coeficienți reali, dar cu soluții complexe; <i>Standarde superioare</i>: să opereze cu numere complexe, să lucreze cu numerele complexe sub formă trigonometrică, să folosească numerele complexe în identități polinomiale și ecuații. 4. <i>Cantități reprezentate vectorial și matriceal</i>: să reprezinte și să modeleze diferite cantități folosind vectori, să opereze cu vectori, cu matrici și să le poată folosi în aplicații.
2. Algebra	Modelarea fenomenelor de zi cu zi prin ecuații și inecuații și aproximarea soluțiilor unei ecuații folosind grafice. Rezolvarea unei ecuații, inecuații sau a unui sistem.	1. <i>Observarea structurii expresiilor</i> (să interpreteze structura unor expresii, să rescrie unele expresii în formă echivalentă pentru a rezolva probleme). 2. <i>Aritmetica polinoamelor și expresiilor raționale</i>: să facă calcule cu polinoame, să înțeleagă relația dintre zerourile și factorii unui polinom, să folosească identități polinomiale în rezolvarea problemelor, să rescrie expresiile raționale în forme echivalente. 3. <i>Crearea ecuațiilor care descriu numere și relații</i>: să reprezinte diferite “constrângeri” din viața de zi cu zi în termeni de ecuații sau sisteme de ecuații și inecuații). 4. <i>Raționamente cu ecuații și inegalități</i>: să înțeleagă rezolvarea ecuațiilor în urma unui raționament, să rezolve ecuații și inecuații de o singură variabilă, să reprezinte ecuațiile și inecuațiile folosind graficele.
3. Funcții	Interpretarea fenomenelor ca funcții și “citirea” caracterului lor liniar, pătratic sau exponențial sau identificarea a două funcții ce au aceleași valori în anumite puncte, folosind metode grafice.	1. <i>Interpretarea funcțiilor</i>: să înțeleagă conceptul de funcție și să folosească notația funcțională, să interpreteze funcțiile care apar în diferite aplicații în contextul respectiv, să analizeze funcțiile ce apar în diferite reprezentări. 2. <i>Construirea funcțiilor</i>: să construiască o funcție care să modeleze relația dintre două cantități, să poată construi o nouă funcție dintr-o funcție dată. 3. <i>Modelele liniare, pătratice și exponențiale</i>: să poată construi, compara și interpreta cele trei modele și să rezolve probleme. 4. <i>Funcțiile trigonometrice</i>: să extindă domeniul funcțiilor trigonometrice folosind cercul unitate, să modeleze fenomene periodice ce apar în viața reală folosind funcții trigonometrice, să demonstreze și să aplice identitățile trigonometrice de bază).
4. Modelare matematică	Dezvoltarea capacității de a modela matematic	Identificarea variabilelor esențiale, formularea unui model folosind metode geometrice, grafice, tabulare, algebrice sau statistice, analiza

	fenomene ce apar în viața reală.	relațiilor obținute, interpretarea rezultatelor matematice obținute în termenii situației inițiale, validarea concluziilor prin compararea cu situația inițială și, eventual, îmbunătățirea modelului. <i>Exemple:</i> ce cantitate de hrană este necesară pentru un oraș cu o populație de 3 milioane de oameni, devastat de un cataclism natural; planificarea unui turneu de tenis de masă la care participă 7 persoane, care joacă fiecare cu fiecare, având la dispoziție doar 4 mese; analiza distanței de frânare a unei mașini etc.
5. Geometrie	Formalizarea “experienței” geometrice din școala gimnazială folosind definiții mai precise și raționamente mai profunde. Folosirea transformărilor geometrice (translații, rotații sau simetrii) contribuie la dezvoltarea abilităților de identifica forme echivalente în viața de zi cu zi.	1. <i>Congruențe:</i> să folosească transformările planului, să înțeleagă congruența în termeni de “mișcări” rigide, să demonstreze câteva teoreme clasice privind unghiurile, să poată face construcții elementare cu rigla și compasul. 2. <i>Asemănare, triunghiuri dreptunghice și trigonometrie:</i> să înțeleagă asemănarea în termeni de omotetii, să demonstreze teoremele Thales și Pitagora folosind asemănări, să definească rapoarte trigonometrice și să rezolve probleme cu triunghiuri dreptunghice. 3. <i>Cercul:</i> să înțeleagă și să aplice teoremele clasice despre cerc, să deducă, folosind asemănarea, lungimea unui arc și aria unui sector de cerc. 4. <i>Exprimarea unor proprietăți geometrice folosind ecuațiile:</i> să reformuleze proprietățile geometrice ale secțiunilor conice în termeni algebrici folosind ecuațiile, să utilizeze coordonatele pentru demonstrarea algebrică a unor fapte geometrice simple. 5. <i>Măsurări geometrice. Dimensiune:</i> să înțeleagă formulele de volum și să le folosească pentru a rezolva probleme, să “vizualizeze” legăturile dintre obiectele bidimensionale și cele tridimensionale, de exemplu cazul secțiunilor plane în corpuri din spațiu. 6. <i>Modelarea fenomenelor folosind geometria:</i> să folosească forme geometrice, mărimile și proprietățile lor pentru a descrie obiecte din natură, să folosească figuri geometrice plane sau spațiale în probleme de design.

Japonia

Clasa	Conținuturi/obiective de învățare
aV-a –aVI-a	Paritate; factori și multipli; scrierea zecimală; operații cu numere zecimale; operații cu fracții; proprietăți ale operațiilor. Calcularea ariei pentru triunghiuri și patrulatere speciale; unități de măsură pentru volum și calcularea acestuia; aria cercului; estimarea ariei unor figuri prin aproximarea lor cu figuri familiare; calcularea vitezei. Recunoașterea unor poligoane regulate; recunoașterea congruenței; înțelegerea reprezentării la scară; înțelegerea simetriei. Proportionalitate; procente și reprezentarea lor grafică (bare sau cercuri); reprezentarea numerelor prin litere; analiza statistică a datelor: medie, frecvență.
aVII-a	Numere negative: calcul cu acestea, folosirea lor în practică; folosirea literelor în calcule; calcul literal; ecuații: rezolvare, folosire în rezolvare de probleme. Bisectoare, mediatore, perpendiculară, translație, simetrie, rotație; reprezentarea plană a unui corp: desen, desfășurare; sector de cerc: arie, lungime; aria și volumul unei piramide sau sfere.

	Relația de proporționalitate directă/inversă ca relație funcțională. Organizarea datelor în tabele și grafice, folosind calculatorul
aVIII-a	Calcul polinomial; sisteme liniare de două ecuații. Proprietăți de paralelism; unghiurile unui triunghi; congruența triunghiurilor; demonstrații, verificarea prin demonstrație a proprietăților unei figuri. Funcții liniare; probabilități în cazuri simple
aIX-a	Rădăcina pătrată: calcule, situații de folosire; formule de calcul prescurtat; descompunere în factori; ecuații de gradul II. Triunghiuri asemenea; paralelism și rapoarte; reprezentări la scară – arii și volume; unghiuri în cerc; teorema lui Pitagora. Funcții de forma $y = ax^2$. Deducerea tendințelor într-o populație statistică, din folosirea unor eșantioane.
X-XII cursul superior	Matematică I (pentru toți) : funcții pătratice; rapoarte trigonometrice; șiruri; combinatorică; probabilități. Matematică II: funcții exponențiale; funcții trigonometrice; geometrie analitică (drepte și cercuri); conceptele de limită, derivată și integrală definită. Matematică III: funcții și limite; șiruri și serii geometrice; calcul diferențial și integral Matematică A: expresii algebrice; egalități și inegalități; geometrie plană; șiruri; inducție matematică; binomul lui Newton; folosirea calculatorului pentru calcul. Matematică B: vectori; numere complexe și planul complex; distribuții probabilistice; algoritmi Matematică C: aritmetica matricelor; sisteme de ecuații liniare; conice; coordonate polare; analiză numerică; statistică bazată pe folosirea analizei matematice.

Coreea de Sud³¹

Clasa aV-a

NO	A	divizori și multipli; simplificare și amplificare; adunare și scădere de fracții cu numitori diferiți; înmulțirea fracțiilor
	B	înmulțirea și împărțirea fracțiilor ordinare și zecimale
FG	A	paralelipipedul dreptunghic și cubul; percepție spațială
	B	congruență și simetrie
M	A	perimetru; arie
	B	unități diverse; arii diverse

³¹ Curriculumul comun are 6 domenii: numere și operații; figuri geometrice; măsurare; probabilități și statistică; litere și expresii; tipare și funcții, împărțite, în fiecare clasă, în două părți. Conținuturile au fost reduse mult în ultimii ani.

PS	B	reprezentarea datelor
LE	A	rezolvarea de probleme
	B	rezolvarea de probleme
TF	A	construirea de figuri regulate

Clasa aVI-a

NO	A	fracții ordinare și zecimale
	B	împărțirea fracțiilor ordinare și zecimale
FG	A	proprietățile prisme și piramidei; percepție spațială
	B	alte figuri în spațiu
M	A	suprafețe și volume; măsurări
	B	numărul pi și aria cercului; aria și volumul cilindrului
PS	B	numărul de realizări ale unui eveniment și probabilitate
LE	A	rezolvarea de probleme
	B	rezolvarea de probleme
TF	A	raport și rată; proporționalitate
	B	tipare și corespondențe; șir de rapoarte egale și proporționalitate

Clasa aVII-a

NO	A	mulțimea numerelor naturale; sistem zecimal și binar; numere întregi și raționale
	B	figuri geometrice de bază; construirea și congruența figurilor; proprietățile figurilor plane; proprietățile figurilor din spațiu
M	B	poligoane și măsura unghiurilor; lungimi, arii și volume de figuri geometrice
PS	B	reprezentarea grafică a unei distribuții; frecvență relativă; frecvență cumulată
LE	A	folosirea literelor în expresii; ecuații; folosirea ecuațiilor
TF	A	funcții și grafice; folosirea funcțiilor

Clasa aVIII-a

NO	A	numere raționale
FG	B	proprietățile triunghiurilor și dreptunghiurilor; asemănarea; aplicații ale asemănării
M	B	aproximare și eroare; adunarea și scăderea
PS	B	proprietăți de bază ale probabilităților
LE	A	calcularea de expresii; sisteme de ecuații cu două necunoscute; folosirea sistemelor de ecuații; inecuații liniare și sisteme de inecuații liniare; folosirea sistemelor
TF	A	funcții liniare și grafice; folosirea funcțiilor liniare

Clasa a IX-a

NO	A	rădăcina pătrată; numere reale; calcularea expresiilor
FG	B	teorema lui Pitagora; cercul – proprietăți, unghiuri
M	B	rapoarte trigonometrice
PS	B	diagrame de variabile corelate
LE	A	înmulțirea și descompunerea polinoamelor; ecuații pătratice; folosirea ecuațiilor pătratice
TF	A	funcții pătratice și graficele lor

Clasa a X-a

NO	A	operații cu mulțimi și propoziții; numere reale; numere complexe
FG	B	coordonate în plan; ecuația dreptei; ecuația cercului; deplasări în plan
M	B	regiunea de valabilitate a unei inegalități
PS	B	deviere standard
LE	A	operații cu polinoame; descompunerea, divizorii și multiplii polinoamelor; expresii raționale și iraționale; ecuații și inegalități

TF	B	funcții și folosirea lor; funcții raționale și iraționale, funcții trigonometrice și graficele lor; folosirea funcțiilor trigonometrice
----	---	---

Franța (parcursul Seriei Științifice, nivel liceal)

Nivelul	Conținuturi
Seconde	1. Funcții: domeniu de definiție, domeniul valorilor, imaginea curbei, funcții cu valori puncte; funcții crescătoare, descrescătoare, maxim și minim pe un interval pentru o funcție. Rezolvarea grafică și algebrică a ecuațiilor. Funcția de gradul I, funcția de gradul II, funcții omografice; Rezolvarea algebrică și grafică a inecuațiilor ce implică astfel de funcții. Funcția inversă. Trigonometrie, funcții trigonometrice și valorile acestor funcții. Geometrie: Coordonatele unui punct în plan, distanța dintre două puncte, mijlocul unui segment, triunghiuri, patrulatere, cercuri prin intermediul coordonatelor. Dreapta, ecuația dreptei, drepte paralele, drepte secante. Vectori în plan, suma vectorilor, înmulțirea vectorilor cu un scalar. Relația lui Chasles. Geometrie în spațiu: paralelipiped drept, piramide, con și cilindru de revoluție, sfera. Poziția relativă a dreptelor și a planelor în spațiu. Drepte și plane paralele. Statistică și probabilități: Statistica descriptivă și analiza datelor. Eșantion. Eșantionizarea unor date statistice. Probabilitate pentru mulțimi finite. Probabilitatea unui eveniment.
Première	Analiza: pornind de la o funcție dată $u(x)$, cum arată $u + k, ku, \sqrt{u}, \frac{1}{u}$; derivarea funcțiilor elementare, șiruri numerice simple. Geometrie: ecuația dreptei și consecințe; Elementele de trigonometrie: noțiunea de radian, funcțiile sinus și cosinus pentru unghiuri măsurate în radiani, folosind produsul scalar și teorema lui Pitagora generalizată, exprimată prin produs scalar și norme, se ajunge la demonstrarea lui $\cos(a - b)$. Statistică și probabilități: dispersia, variabilele aleatoare discrete și diverse legi de probabilitate. Schema Bernoulli, legea binomială, coeficienți binomiali, triunghi Pascal, eșantionare. Utilizarea calculatorului și a softurilor specializate conduc la înțelegerea noțiunilor de intrare, ieșire, calcul, scrierea unui program care efectuează un calcul, problematica calculului iterativ, instrucțiuni condiționale.
Terminale	Analiză matematică, Geometrie: Numere complexe, Geometrie în spațiu, probabilități și statistică. Limita finită și infinită a unui șir (cu definiția). Compararea șirurilor și a limitelor lor. Criterii de comparație. Operații cu limite. Șiruri majorate, minorate, șiruri mărginite. Limite de funcții. Asimptote. Interpretări geometrice. Continuitate și Proprietatea lui Darboux. Complemente la calculul derivatelor, derivatele funcțiilor compuse. Funcțiile sinus și cosinus, proprietăți diferențiale ale lor. Funcția exponențială (ca unică funcție derivabilă care are proprietatea că este egală cu derivata sa și $f(0)=1$). Proprietăți ale funcției exponențiale. Funcția logaritmică neperiană. Integrala unei funcții continue și pozitive ca aria de sub curbă. Noțiunea de primitivă a unei funcții continue și pozitive. Calcul de primitive. Teorema de medie pentru integrala definită. Geometrie: numere complexe și geometrie în spațiu: Forma algebrică a unui număr complex. Conjugatul unui număr complex. Reprezentare în plan. Rezolvarea în $\mathbb{C}$ a ecuației de gradul doi. Modul, argument restrâns, argument, aplicații. Relația lui Euler. Aplicații algebrice. Drepte și plane în spațiu, intersecție și paralelism. Ortogonalitate în spațiu: dreapta, dreapta; dreapta, plan; plan, plan. Vectori coplanari, reper, reprezentare parametrică a unei drepte. Ecuații ale planelor și dreptelor în spațiu. Exerciții. Explicarea noțiunilor anterioare via ecuațiile dreptelor și planelor în spațiu. Vizualizări 3D. Probabilități și statistică Probabilități condiționate. Evenimente independente. Legea de densitate și aplicații: trecerea de la noțiunea de probabilitate privită ca frecvență la probabilitate definită prin arii sau volume. Media

	unei variabile aleatoare care urmează o lege uniformă. Metoda Monte Carlo. Legi exponențiale. Legea normală. Teorema Moivre-Laplace. Legea normală pătratică. Intervale de fluctuație. Intervale de fluctuație asimptotice. Estimare. Marja de eroare la un eveniment cu probabilitate cerută. Algoritmi în limbaj uzual sau în limbaj simbolic. Materia din Terminale poate fi aprofundată prin studiul unor probleme speciale împărțite în două subdomenii: aritmetică și matrici.
--	--

Bibliografie

1. Comisia Europeană. (2011), *Învățământul matematic în Europa: Provocări comune și politici naționale*, Agenția Executivă pentru Educație, Audiovizual și Cultură, EACEA P9 Eurydice.
2. Eurydice. (2009), *National Testing of Pupils in Europe: Objectives Organisation and Use of Result*, Brussels.
3. European Commission. (2009), *Measuring Creativity*, Joint Research Centre Brussels.
4. González, O. (2012) *Secondary Mathematics Teachers' Professional Competencies For Effective Teaching of Variability-Related Ideas: A Japanese Case Study*, Eighth Congress of European Research in Mathematics Education (CERME 8).
5. Grigutsch, S. (1998), *On pupils' views of mathematics and self-concept: developments, structures and factors of influence*. în E. Pehkonen & G. Törner (Eds.) *The state-of art in mathematics-related belief research. Results of the MAVI activities*. University of Helsinki. Department of Teacher Education. Research report.
6. Hiebert, J. Stigler, J. (2004), *A world of difference* Mathematics and Science. 25/4,
7. Lew, H.C (2011), *Current Issues for Mathematics Curriculum Reform in Korea*, Korea National University of Education, APEC Tsukuba Conference, Tokyo.
8. Mastrull, S. (2002), *The Mathematics Education of Students in Japan: A Comparison with United States Mathematics Programs*, Bristol Township School District, MIC 8 Training.
9. Mee, P.K., (1997), *School Mathematics Curriculum in Korea*, Journal of the Korea Society of Mathematical Education Series D, Research in Mathematical Education, Vol. 1, No. 1.
10. Mullis, I.V.S., Martin, M.O., Minnich, C.A., Stanco, G.M., Arora, A., Centurino, V.A.S., & Castle, C.E. (2011), *TIMSS Encyclopedia: Education Policy and Curriculum in Mathematics and Science, Volumes 1 and 2*, Chestnut Hill, MA: TIMSS & PIRLS International Study Center, Boston College.
11. Nagasaki., E. (2012), *Mathematical Literacy For Living in the Highly Information-and-Technology-Oriented in the 21st Century: Mathematics Education from the Perspective of Human Life in Society*, 12th International Congress on Mathematical Education, COEX: Seoul.
12. National Center for Education. (2003), *Teaching mathematics in seven countries, results from the TIMMS*, Video study from 1999.
13. National Center for Education, *The TIMSS Videotape Classroom Study: Methods and Findings from an Exploratory Research Project on Eighth-Grade Mathematics Instruction in Germany, Japan, and the United States U.S.* (1999), Department of Education Research Report.
14. National Science Foundation – MT-2. (2007), *The preparation gap: teacher education for middle school mathematics in six countries USA*.
15. OECD. (2015), *Regards sur l'éducation 2015: Les indicateurs de l'OCDE*, Éditions OCDE.
16. OECD.(2009), *Education at a Glance*, OECD Indicators.

<http://www.oecd.org/education/skills-beyond-school/43636332.pdf>

17. OECD. (2004), *Learning for Tomorrow's World – First Results from PISA 2003*. Paris.

<http://www.oecd.org/dataoecd/1/60/34002216.pdf>

18. Sullivan, P., *Teaching Mathematics: using informed teaching strategies*, ACER Press, 2011.
19. Rezat, S. (2006), *The structures of German mathematics textbooks*, Springer Publishing New York.
20. Swan, M. (2005). *Improving learning in mathematics: Challenges and strategies*. Sheffield, England: Department of Education and Skills Standards Unity.
21. Royal Society. (2014), *Vision for Science and Mathematics Education*, Policy Centre Report.
22. Takahashi, A., Watanabe, T., Yoshida, M., (2008), *English Translation of the Japanese Mathematics Curricula in the Course of Study*, Staff Development Council în Utsunomiya University http://ncm.gu.se/media/kursplaner/andralander/Japanese_COS2008Math.pdf
23. Tatto, M.T. (2011), *Policy, Practice, and Readiness to Teach Primary and Secondary Mathematics in 17 Countries. Findings from the IEA Teacher Education and Development Study in Mathematics*
24. UNESCO. (2012), *Challenges in basic mathematics education*.

<http://www.nysedregents.org/>.

www.maths-et-tiques.fr/index.php/programmes

media.education.gouv.fr/file/30/52/3/programme_mathematiques_seconde_65523.pdf

[http://www.nuffieldfoundation.org/sites/default/files/files/GERMANY%20\(R-P\)%20country%20profilev_FINAL.pdf](http://www.nuffieldfoundation.org/sites/default/files/files/GERMANY%20(R-P)%20country%20profilev_FINAL.pdf)

<http://www.nap.edu.au/naplan/naplan.html>

<http://www.australiancurriculum.edu.au/mathematics/curriculum/f-10?layout=1>

http://www.acara.edu.au/verve/_resources/Australian_Curriculum_-_Maths.pdf

http://www.huffingtonpost.com/2014/09/02/50-states-common-core_n_5751864.html

<http://www.history.didaktik.mathematik.uni-wuerzburg.de/meg/>

http://www.educationworld.com/a_admin/admin/admin074.shtml

http://page.mi.fu-berlin.de/bhrnds/publ_papers/smf_gazette_121_101-106.pdf

media.education.gouv.fr/file/30/52/3/programme_mathematiques_seconde_65523.pdf

cache.media.education.gouv.fr/file/skkpecial_9/21/1/mathsS_155211.pdf

Lista tabelelor

Tabel nr. 1. Patternuri ale culturii predării, Video Study (1995)

Lista figurilor

Fig. 1. Percepția elevilor asupra importanței matematicii, științelor și lecturii. PISA 2006

Fig. 2. Percepții asupra gradului de dificultate al lecțiilor de matematică în Germania, Japonia, SUA.

Fig. 3. Evoluția performanțelor TIMSS la clasa a IV-a.

Fig. 4. Cercetări despre motivație în învățarea matematicii. Sursa Eurydice, 2011