SOCIETATEA DE ŞTIINŢE
MATEMATICE DIN ROMÂNIA

IDEI ŞI MODELE ÎN PREDAREA MATEMATICII

MIHAIL BĂLUNĂ
WLADIMIR-GEORGES BOSKOFF
CĂTĂLIN GHERGHE
RADU GOLOGAN
ALEXANDRU NEGRESCU
DORU ŞTEFĂNESCU

BUCUREŞTI, 2017

Acest material a fost finanţat, parţial, printr-un grant acordat de **Romanian-American Foundation**. Opiniile, constatările şi concluziile sau recomandările exprimate în material sunt cele ale autorilor şi nu reflectă în mod necesar pe cele ale **Romanian-American Foundation**.

CUPRINS

INTRODUCERE

Ideea de a elabora acest material a pornit de la discuţiile pe care derularea proiectului despre educaţia matematică în România le-a stârnit la fiecare întâlnire. Leit-motivul a fost de fiecare dată: cum facem ca o lecţie de matematică să devină atractivă pentru o generaţie crescută cu presiunea imaginilor şi a diversităţii extraordinare a mijloacelor de comunicare?

Am încercat, de aceea, să propunem câteva idei, câteva construcţii care să reprezinte un început. Evident că autorii acestor intervenţii nu au pretenţia unui material închegat sau definitiv. El vrea să însemne un început.

În plus, nu avem pretenţii de originalitate, dar, adesea, o experienţă de ani la catedră te aduce la un numitor comun.

Sperăm ca acest material să fie util pentru o adevărată reformă în abordarea dascălului matematician a relaţiei elev–matematică.

Autorii

ABORDĂRI INTUITIVE ALE UNOR TEME DIN MATERIILE CLASELOR XI-XII

de MIHAIL BĂLUNĂ

Una dintre strategiile metodice ,,învechite” ale profesorului meu de matematică din liceu – doamna Lucia Ţene – era cuprinsă în propoziţia: ,,să facem o poză.” Acest îndemn sintetizează perfect ideea că predarea matematicii, la orice nivel, trebuie să aibă ca ţintă formarea la elevi a unei percepţii clare la nivel intuitiv a fenomenului studiat.

Deşi matematica de la clasele mari este mai teoretizată, există posibilităţi destule de prezentare intuitivă a unor teme sau secvenţe de lecţie. Putem să cerem ajutorul intuiţiei pentru a defini concepte, pentru a descoperi proprietăţi, pentru a facilita reţinerea unor rezultate, pentru a găsi rezolvarea unor probleme etc. Iată câteva exemple.

1. Rangul unei matrice. Ideea de rang se poate ilustra pornind de la întrebări de genul: *Câte ecuaţii ,,contează” în sistemul*

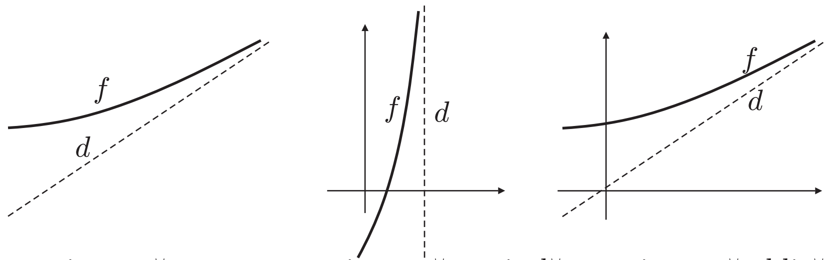
$$\begin{cases} 2x+3y+z=4 \\ 3x+4y+2z=7 \\ 5x+7y+3z=11 \end{cases} \quad ?$$

Observaţia că a treia ecuaţie este o consecinţă a primelor două justifică noţiunea de dependenţă liniară şi definiţia noţiunii de rang.

2. Metoda Gauss de rezolvare a unui sistem. Pornind de la metoda de rezolvare a unui sistem prin substituţie, se evidenţiază motivul pentru care metoda Gauss reprezintă o cale naturală de rezolvare a unui sistem de ecuaţii liniare.

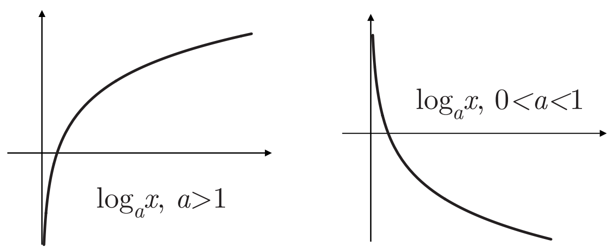
3. Conceptul de limită a unui şir. Pornind de la un exemplu concret (e.g., şirul $(x_n)_n$, cu $x_n = \frac{n}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$), se poate lansa întrebarea: *Cum descriem riguros că termenii şirului ,,tind” la* 1? Chiar dacă formularea riguroasă, folosind vecinătăţi, este greu de imaginat de către elevi (de fapt, până acum nu am reuşit, pe căi euristice, să le induc elevilor formularea ,,oficială”), exerciţiul este util din punct de vedere formativ.

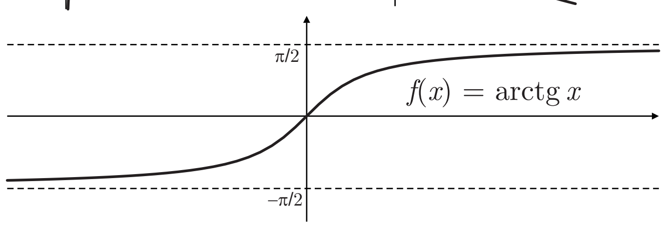
4. Definirea noţiunii de asimptotă. Această noţiune se poate descrie intuitiv (grafic tangent la o dreaptă într-unul dintre punctele de la infinit ale acesteia), apoi se poate descrie riguros fenomenul, ajungându-se la definiţie: în cazul asimptotei verticale, când variabila se ,,apropie” de punctul x_0, funcţia tinde la plus sau minus infinit; în cazul asimptotei oblice/orizontale, când variabila ,,tinde” la infinit, diferenţa dintre funcţia f şi funcţia liniară asociată dreptei tinde la 0.



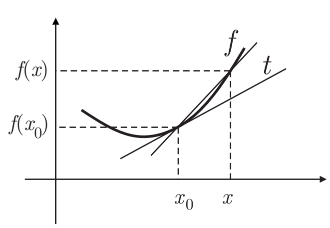
asimptotă   asimptotă verticală   asimptotă oblică

5. Limitele unor funcţii de bază „la capetele" domeniului de definiţie. Folosind o imagine adecvată, se pot reţine mai uşor unele rezultate de tipul: $\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}$; $\lim\limits_{x\to 0} \log_a x = -\infty$ şi $\lim\limits_{x\to\infty} \log_a x = +\infty$, pentru $a > 1$; $\lim\limits_{x\to 0} \log_a x = +\infty$ şi $\lim\limits_{x\to\infty} \log_a x = -\infty$, pentru $a \in (0, 1)$ etc.

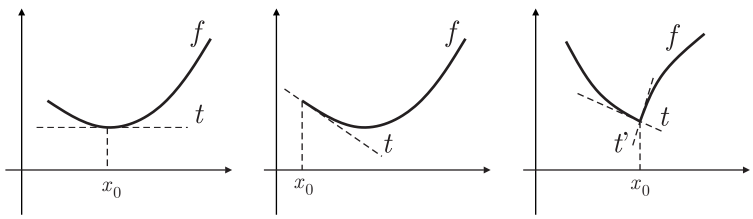




6. Definirea tangentei la graficul unei funcţii, legată de definiţia derivatei. Într-adevăr, dacă (la fel ca grecii antici!) percepem tangenta ca o poziţie-limită a coardelor, atunci panta tangentei este limita pantei coardelor, adică a raportului diferenţial: *panta tangentei este* $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.



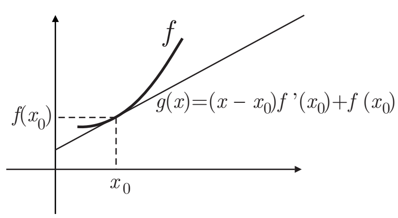
7. Justificarea intuitivă a valabilităţii teoremei lui Fermat. Într-adevăr, faptul că un punct de extrem este în interiorul intervalului şi funcţia este derivabilă în acel punct ,,asigură” existenţa unei tangente paralele cu *Ox*, pe când situarea punctului de extrem la un capăt sau existenţa unor derivate laterale diferite nu asigură existenţa acelei tangente.



8. O problemă de funcţii convexe. *Arătaţi că, oricum am lua un punct A pe graficul G al unei funcţii convexe şi de două ori derivabile, G se află deasupra tangentei în A la G.*

Pentru rezolvare, trebuie ca, analizând o figură, să descriem:

- ce înseamnă că G este deasupra dreptei t (cum arată ordonatele punctelor de pe t şi ce relaţie algebrică apare între funcţia dată f şi funcţia g, al cărei grafic este t);
- cum folosim convexitatea (folosind derivata, arătăm că $f - g$ este descrescătoare la stânga punctului de tangenţă şi crescătoare la dreapta lui).



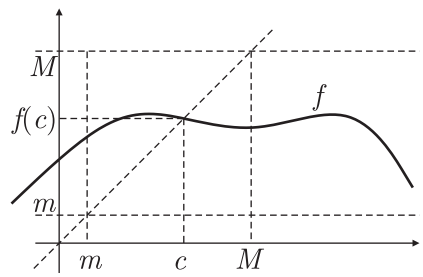
Eventual, odată rezolvată această problemă, putem încerca să analizăm situaţia în care slăbim ipoteza, cerând ca funcţia convexă să fie doar o dată derivabilă.

9. Probleme a căror rezolvare necesită folosirea proprietăţii lui Darboux. *Arătaţi că dacă funcţia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *este continuă şi mărginită, atunci graficul ei taie prima bisectoare.*

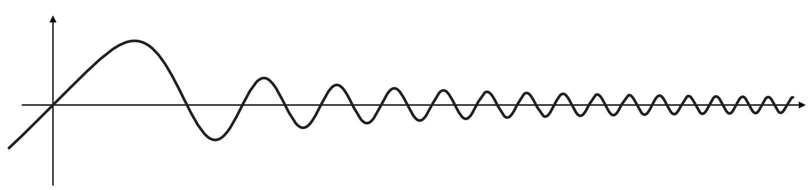
Reprezentarea geometrică a situaţiei poate fi folosită pentru:

- a observa că trebuie să dovedim existenţa unui punct c pentru care $f(c) = c$, de unde ideea de a considera funcţia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - x$;

- a justifica ideea că am putea să dovedim că graficul funcţiei taie prima bisectoare într-un punct situat între m – un minorant al funcţiei şi M – un majorant al funcţiei.



10. Probleme în care este nevoie să construim un contraexemplu. *Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcţie derivabilă pe $\mathbb{R}$. Arătaţi că, dacă $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)+f'(x))$ există şi este $l\in\mathbb{R}$, atunci $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ există şi este tot l. Este adevărată reciproca?* Desigur că justificarea afirmaţiei directe nu poate fi ,,reconstituită" intuitiv, deoarece ideea de a folosi $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x f(x)}{e^x}$ poate fi introdusă euristic (avem nevoie de ,,ceva" care să ,,lege" $f+f'$ de f, deci ne putem gândi la folosirea derivatei funcţiei $x\mapsto e^x f(x)$), dar nu bazându-ne pe un suport ,,concret". Pentru reciprocă însă, imaginarea unui grafic de funcţie care să ,,oscileze constant cu oscilaţii din ce în ce mai mici", deci pentru care funcţia are limită, dar derivata nu are limită la $+\infty$, este cel care ne poate da ideea unui exemplu care să o invalideze – de exemplu, $f(x)=\frac{\sin x^2}{x}$.



11. Introducerea noţiunii de grupuri izomorfe. Pornind de la tablele legilor de compoziţie ale grupurilor $(\mathbb{Z}_4,+)$, $(U_4,\cdot)$ şi grupul $(K,\circ)$ al lui Klein, remarcăm că primele două se pot ,,suprapune", pe când a treia nu se ,,potriveşte" cu primele două, oricum am permuta elementele. Aceasta justifică ideea de a ,,compara" grupurile, astfel încât să putem spune dacă ele sunt sau nu ,,la fel".

$+$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$
$\hat{1}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{0}$
$\hat{2}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$
$\hat{3}$	$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$

$\cdot$	1	i	–1	–i
1	1	i	–1	–i
i	i	–1	–i	1
–1	–1	–i	1	i
–i	–i	1	i	–1

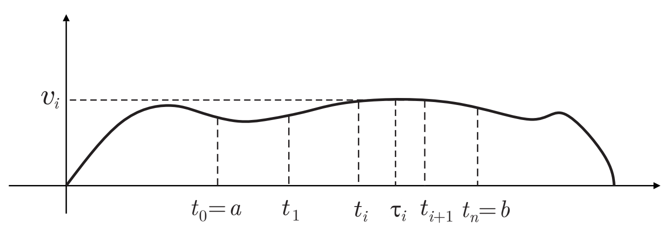
$\circ$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

12. O problemă de comparare a proprietăţilor de calcul a diferitelor obiecte studiate la algebră. *Arătaţi că dacă A, B şi C sunt trei numere complexe, cu $A^2 - A = B^2 - B = C^2 - C$, atunci cel puţin două dintre ele sunt egale. Rămâne afirmaţia adevărată dacă A, B şi C sunt matrice de ordinul 2, cu elemente reale?* După ce se observă că A, B şi C sunt soluţiile unei ecuaţii de forma $x^2 - x = k$, iar ecuaţia are cel mult două soluţii – consecinţă a faptului că, în $\mathbb{C}$, $xy = 0$ implică $x = 0$ sau $y = 0$ – se evidenţiază faptul că, în $M_2(\mathbb{R})$, ecuaţia $X^2 - X = kI_2$ are ca soluţii matricele de urmă 1 şi determinant $-k$, deci o infinitate de solţii.

13. O problemă de grupuri. *Arătaţi că orice subgrup H al lui $(\mathbb{Z}, +)$ este de forma $n\mathbb{Z}$, cu $n \in \mathbb{N}$.* Cheia rezolvării acestei probleme este definirea lui n: dacă $H \neq \{0\}$, atunci n este cel mai mic element pozitiv al lui H. De obicei, elevii nu sunt familiarizaţi cu o astfel de descriere; îndemnându-i, însă, pe elevi să se gândească la reprezentarea pe axa reală a elementelor grupului (am experimentat acest lucru şi funcţionează!), se poate obţine de la ei răspunsul aşteptat: luăm n egal cu primul element de la dreapta lui 0.

14. Definirea integralei Riemann. Chiar dacă programa actuală nu prevede definirea integrabilităţii (conform programei, integrala este, în esenţă, ,,un număr care se calculează conform formulei Leibniz-Newton"), se poate ajunge la justificarea acestei descrieri cu exemple de genul celui următor.

Să presupunem că un tahograf a înregistrat parcursul unui camion ca în figură. Ce distanţă a parcurs camionul într-o anumită perioadă de timp ?



Să presupunem că am împărţit intervalul $[a, b] = [t_0, t_n]$ în intervale mai mici şi că în intervalul $[t_i, t_{i+1}]$ avem viteza aproximativ egală cu $v_i = v(\tau_i)$, unde τ_i este un moment din intervalul considerat. Atunci, în intervalul $[t_i, t_{i+1}]$ se parcurge distanţa $d_i = v(\tau_i)(t_{i+1} - t_i)$.

Dacă presupunem că funcţia v este derivata unei funcţii V şi că momentul τ_i este aproximativ cel care corespunde punctului intermediar obţinut prin aplicarea teoremei lui Lagrange funcţiei V pe intervalul $[t_i, t_{i+1}]$, atunci $d_i = V(t_{i+1}) - V(t_i)$, iar distanţa totală este $\sum d_i = V(t_n) - V(t_0) = V(b) - V(a)$. Cum intuiţia ne spune că dacă luăm momentele intermediare din ce în ce mai apropiate, atunci aproximarea este din ce în ce mai bună, suntem conduşi la a admite că distanţa cerută este $V(t_n) - V(t_0)$, unde funcţia V este o primitivă a funcţiei v.

15. Calcularea unei integrale non-standard. Să calculăm

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{e^x + \sin x + \cos x}\,\mathrm{d}x.$$

Prima observaţie este că integrala nu ,,seamănă” cu cele al căror calcul este dat de teorie. Suntem, aşadar, nevoiţi să improvizăm. O idee rezonabilă este să încercăm să folosim o funcţie a cărei derivată să ne dea numitorul. Să încercăm cu $\ln(e^x + \sin x + \cos x)$:

$$(\ln(e^x + \sin x + \cos x))' = \frac{e^x + \cos x - \sin x}{e^x + \sin x + \cos x}.$$

Aceasta ne conduce la considerarea, pe lângă integrala iniţială I, şi a integralei

$$J = \int_0^{\pi/2} \frac{e^x + \cos x}{e^x + \sin x + \cos x}\,\mathrm{d}x.$$

Atunci

$$I+J = \int_0^{\pi/2} 1\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}, \quad J-I = \int_0^{\pi/2} (\ln(e^x + \sin x + \cos x))'\,\mathrm{d}x = \ln\frac{e^{\pi/2}+1}{2}$$

şi de aici obţinem valoarea lui I.

PROF. MIHAIL BĂLUNĂ
COLEGIUL NAŢIONAL ,,MIHAI VITEAZUL” DIN BUCUREŞTI

BUNE PRACTICI ÎN GEOMETRIE
(Ce cred eu că înseamnă şi cum cred că arată, în câteva exemple)
de WLADIMIR-GEORGES BOSKOFF

Geometria este, fără îndoială, în matematica din preuniversitar acea materie care influenţează gândirea copiilor, stimulând imaginaţia şi creând premisele înţelegerii raţionamentelor în mai mulţi paşi. Înţelegere care va conduce elevul spre efectuarea de astfel de raţionamente în alte probleme, nu neapărat similare. Orice profesor a constatat următorul lucru: creativitatea elevilor este influenţată, în mod decisiv, de geometrie.

Evident, şi rolul profesorului este important. Profesorul trebuie să ajute elevul, nu să deseneze o figură corespunzătoare unui enunţ, ci să privească acea figură ca pe o colecţie de informaţii care să îl ajute în rezolvarea problemelor. Creativitatea este stimulată în special de acele probleme care se pretează la mai multe soluţii. Dacă soluţiile sunt de natură să folosească algebra este interesant, dacă, însă, soluţiile problemelor de geometrie conduc la fizică sau se rezolvă folosind cunoştinţe de fizică, atunci este remarcabil. Tot remarcabilă îmi apare posibilitatea de a privi anumite probleme sau teoreme de geometrie plană prin intermediul unor figuri spaţiale deformate sau nedeformate. Dacă geometria îi oferă elevului şansa să ,,alerge" prin Univers începând cu sistemul nostru solar, determinând distanţe până la Lună, până la Soare, diametrul Lunii, diametrul Soarelui şi obligându-l să gândească asta prin intermediul corelaţiei cu fenomene astronomice, atunci elevul îşi dă seama ,,la ce este bună matematica". Demonstrând şi teorema lui Pitagora prin intermediul analizei matematice se ajunge la acel arc peste timp: limbajul matematic evoluează natural, unele lucruri elementare devenind ,,mici perle" ale utilizării limbajului evoluat.

Am structurat materialul în mai multe teme. Fiecare temă îl va învăţa pe copil ceva. Fiecare temă are o pedală de acceleraţie pentru profesor, dar şi posibile frâne. În fiecare temă, cu excepţia temei 6, voi evidenţia cu MAJUSCULE zona care trebuie povestită cu atenţie pentru a obţine ceea ce dorim: copilul să înţeleagă, copilul să se bucure că înţelege, copilul să fie capabil să evidenţieze generalitatea unei afirmaţii sau chiar a unei tehnici. Copilul trebuie să se bucure că înţelege!

Nu consider că Matematica poate fi făcută uşoară precum lectura unei cărţi beletristice a unui autor de succes. Cinstit vorbind, şi în literatură sunt autori ermetici, deci şi acolo găsim cărţi ,,greu de citit". Revenind la Matematică, ea nu este uşoară, ea este complicată. Doar un Profesor dedicat poate schimba, cu o temă bine aleasă, cu explicaţii bine conduse, percepţia despre matematică şi interesul cuiva pentru matematică. Pentru acel, sau acei, care nu cred asta am selecţionat câteva rânduri din ,,lecture19" a lui Richard Feynman, un geniu în opinia multora.

When I was in high school, my physics teacher - whose name was Mr. Bader - called me down one day after physics class and said, ,,You look bored; I want to tell you something interesting." Then he told me something which I found absolutely fascinating, and have, since then, always found fascinating. Every time the subject comes up, I work on it. In fact, when I began to prepare this lecture I found myself making more analysis on the thing. Instead of worrying about the lecture, I got involved in a new problem. The subject is this - the principle of least action.

Am încercat să structurez materialul sub forma unor ,,prelegeri Feynman" fără însă să am pretenţia că pot depăşi un maestru.

1. Lecţie la dispoziţia profesorului: TRIUNGHIUL ORTIC

Se numeşte *triunghi ortic* triunghiul determinat de picioarele înălţimilor unui triunghi dat.

Problemă. *Fie* ABC *un triunghi şi punctele* $A' = \operatorname{pr}_{BC} A, B' = \operatorname{pr}_{CA} B, C' = \operatorname{pr}_{AB} C$. *Atunci:*

i) triunghiurile $AB'C', BA'C'$ *şi* $CB'A'$ *sunt triunghiuri asemenea cu triunghiul* ABC*;*

ii) semidreptele $[A'A, [B'B$ *şi* $[C'C$ *sunt bisectoarele unghiurilor triunghiului ortic;*

iii) ortocentrul triunghiului ABC *este centrul cercului înscris în triunghiul ortic* $A'B'C'$*, iar vârfurile triunghiului* ABC *sunt centrele cercurilor exînscrise triunghiului ortic* $A'B'C'$*;*

iv) tangenta în punctul A *la cercul circumscris triunghiului* ABC *este paralelă cu dreapta* $B'C'$*;*

v) dintre toate triunghiurile înscrise în triunghiul ABC*, triunghiul ortic are perimetrul minim* (**teorema lui Feuerbach**).

Soluţie. SE ÎNCEPE CU REALIZAREA FIGURII, EXPLICÂND ELEVULUI FIECARE LINIE TRASATĂ ŞI PROPRIETĂŢILE EI CUNOSCUTE PRIN IPOTEZĂ. APOI, SE ÎNCEP EXPLICAŢIILE, CA MAI JOS.

i) Se demonstrează că triunghiul $AB'C'$ este asemenea cu triunghiul ABC. Patrulaterul $BCB'C'$ este inscriptibil, deoarece $\sphericalangle ABB' \equiv \sphericalangle ACC'$. Rezultă că dreapta $B'C'$ este antiparalelă la BC, deci, $\sphericalangle AB'C' \equiv \sphericalangle ABC$ şi $\sphericalangle AC'B' \equiv \sphericalangle ACB$.

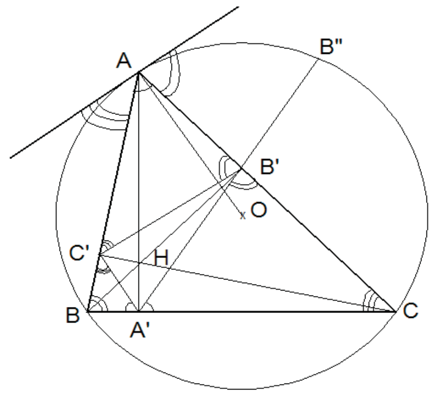


Fig. 1

ii) Conform punctului i), rezultă că $\sphericalangle C'A'B \equiv \sphericalangle B'A'C (\equiv \sphericalangle BAC)$. Atunci $[A'A$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle B'A'C'$.

iii) Din punctul ii) se deduce că ortocentrul H, al triunghiului ABC, este centrul cercului înscris în triunghiul ortic $A'B'C'$. Fie B'' punctul în care semidreapta $[A'B'$ intersectează cercul circumscris triunghiului. Este evident că $\sphericalangle C''B'A \equiv B''B'A$, deci $[B'A$ este bisectoarea unghiului $C'B'B''$. Rezultă că punctul A este centrul cercului exînscris triunghiului $A'B'C'$, tangent laturii $[B'C']$.

iv) Folosind congruenţele de unghiuri marcate pe figură, se obţine că tangenta în A la cercul circumscris triunghiului ABC este paralelă cu dreapta $B'C'$.

v) Atenţie la principiul lui Fermat (fizică)! Se observă că dacă M parcurge dreapta BC, atunci $B'M + MC$ este minimă dacă $\sphericalangle B'MC \equiv C'MB$ (Fig. 2).

Într-adevăr, fie B_1 simetricul lui B' faţă de BC. Se uneşte C' cu B_1. Fie $\{M_1\} = BC \cap C'B_1$. Oricare ar fi punctul $M \in BC$, cu $M \neq M1$, avem:

$$M_1C' + M_1B\text{”} = M_1\text{”}C' + M_1B_1 = C'B_1 < C'M + MB_1 = C'M + MB'.$$

Am obţinut, astfel, că punctul M_1, construit anterior, este punctul de pe dreapta BC cu proprietatea că $MC' + MB'$ este minimă. Dar unghiurile $\sphericalangle C'M_1B$ şi $B'M_1C$ sunt congruente, deoarece fiecare este congruent cu $\sphericalangle B_1M_1C$.

Atenţie! Fie, acum, un triunghi $A'B'C'$ înscris în triunghiul ABC, cu $A' \in (BC), B' \in (AC), C' \in (AB)$. Fixând, două câte două, vârfurile acestui triunghi, se obţine că minimul perimetrului se atinge când laturile triunghiului $A'B'C'$ sunt egal înclinate pe laturile triunghiului ABC, deci, când unghiurile marcate pe Fig. 3 sunt congruente. Folosind acelaşi raţionament ca în demonstraţia punctului ii) se obţine că punctele A, B şi C sunt centrele cercurilor exînscrise triunghiului $A'B'C'$. Rezultă că $[A'A$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle B'A'C'$, deci $\sphericalangle C'A'C \equiv \sphericalangle B'A'A$. Rezultă că $AA' \perp BC$. Analog, se obţin: $BB' \perp AC$ şi $CC' \perp AB$. Prin urmare, $A'B'C'$ este triunghiul ortic.

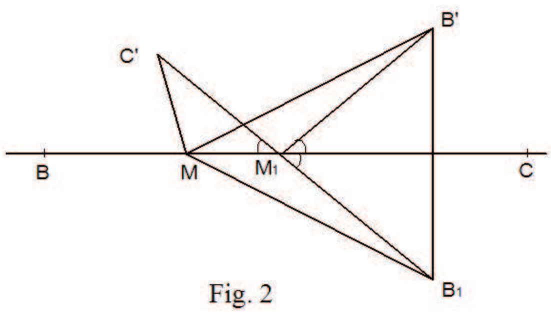


Fig. 2

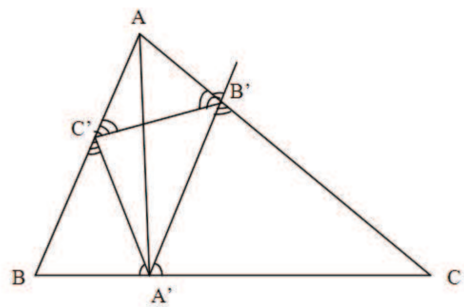


Fig. 3

PROFESORUL VA EXPLICA ELEVILOR LEGĂTURA DINTRE PRINCIPIUL LUI FERMAT ŞI LEGEA REFLEXIEI LUMINII. CE LEGĂTURĂ ARE PROBLEMA CU JOCUL DE BILIARD?

PROFESORUL POATE FACE COMENTARII ASUPRA NATURII PRINCIPIULUI LUI FERMAT ŞI, CHIAR, POATE ATINGE CÂTEVA PROBLEME LEGATE DE NATURA LUMINII ŞI A PROPAGĂRII RAZELOR DE LUMINĂ. POATE ELEVUL SIMPLIFICA DEMONSTRAŢIA? CUM?

2. Lecţie la dispoziţia profesorului: TEOREMA LUI DESARGUES

COMENTARII: Sigur că teorema lui Desargues poate fi prezentată ca o problemă. Nu ar fi rău dacă profesorul ar explica elevilor că această problemă este mai mult decât o problemă. Că natura ei specială o pune la bază în geometria elementară, într-o porţiune care se numeşte *Fundamentele Geometriei*.

SE POATE FACE O TRIMITERE SPRE ISTORIA MATEMATICII! Aici, profesorul ar putea să amintească de **David Hilbert** şi despre atmosfera anilor 1900 la Göttingen, atunci când Hilbert publica prima carte de Fundamentele Geometriei. Că are şi o reciprocă şi că în *geometria proiectivă* această reciprocă este chiar duala ei. Reciproca ar trebui să poată fi enunţată de elevi. Şi chiar demonstrată uşor, folosind ideile din această afirmaţie directă de mai jos.

PROFESORUL VA AMINTI TEOREMA LUI MENELAUS ŞI RECIPROCA EI.

Teoremă (Desargues). *Fie ABC şi $A_1B_1C_1$ două triunghiuri cu proprietatea că există punctele α, β, γ, astfel încât $\{\alpha\} = BC \cap B_1C_1, \{\beta\} = CA \cap C_1A_1$ şi $\{\gamma\} = AB \cap A_1B_1$. Dacă dreptele AA_1, BB_1 şi CC_1 sunt concurente, atunci punctele α, β şi γ sunt coliniare.* (Dreapta se numeşte *axă de omologie*, iar punctul O se numeşte *centrul de omologie* al triunghiurilor ABC şi $A'B'C'$.)

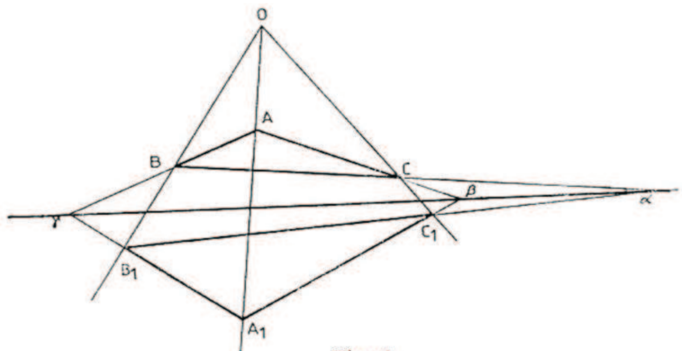


Fig. 4

Demonstraţie. SE ÎNCEPE CU DESENAREA FIGURII. PERSONAL, LA ORICE PROBLEMĂ DE GEOMETRIE FAC ASTA ÎN ACELAŞI TIMP ÎN CARE SPUN ENUNŢUL. AM OBSERVAT CĂ, ÎN ACEST FEL, PROBLEMA ESTE MAI BINE ÎNŢELEASĂ.

Se notează cu O punctul de intersecţie a dreptelor AA_1, BB_1 şi CC_1, deci $\{O\} = AA_1 \cap BB_1 \cap CC_1$.

Se scrie teorema lui Menelaus pentru triunghiul OBC şi punctele coliniare α, C_1, B_1. Atunci $\frac{\alpha B}{\alpha C} \cdot \frac{C_1C}{C_1O} \cdot \frac{B_1O}{B_1B} = 1$.

Permutând circular A, B, C şi α, β, γ, se obţin alte două relaţii analoage: $\frac{\beta C}{\beta A} \cdot \frac{A_1A}{A_1O} \cdot \frac{C_1O}{C_1C} = 1$ şi $\frac{\gamma A}{\gamma B} \cdot \frac{B_1B}{B_1O} \cdot \frac{A_1O}{A_1A} = 1$. Înmulţind ultimele trei egalităţi, se obţine $\frac{\alpha B}{\alpha C} \cdot \frac{\beta C}{\beta A} \cdot \frac{\gamma A}{\gamma B} = 1$. Punctele α, β şi γ se află pe prelungirile laturilor triunghiului ABC. Aplicând reciproca teoremei lui Menelaus, rezultă că punctele α, β şi γ sunt coliniare.

COMENTARIU! SĂ PRIVIM FIGURA DE MAI SUS NU CA PE O FIGURĂ PLANĂ, CI CA PE UNA SPAŢIALĂ. APARE TETRAEDRUL $OA_1B_1C_1$, ,,TĂIAT" DE PLANUL (ABC). NU-I AŞA CĂ PROBLEMA DEVINE EVIDENTĂ? CUM? PRIN DEFORMARE PE UN PLAN. SAU PRIN PROIECŢIE. EXPLICAŢI DECI CUM.

3. Lecţie la dispoziţia profesorului: PROBLEMA LUI L'HUILIER

Fie ABC un triunghi. Se numesc *simediane* simetricele medianelor faţă de bisectoare.

SĂ DEMONSTRĂM URMĂTOAREA PROPRIETATE A SIMEDIANEI. PROFESORUL AMINTEŞTE CĂ LOCUL GEOMETRIC ESTE, ÎN GENERAL, O MULŢIME DE PUNCTE CARE SUNT CARACTERIZATE DE O ANUMITĂ PROPRIETATE. APOI, AMINTEŞTE DE MEDIANE ŞI DESPRE CUM POT FI PRIVITE MEDIANELE CA LOC GEOMETRIC. ELEVUL MAI ARE DOAR DE TRECUT PRINTR-O SIMETRIE ŞI PROBLEMA-I GATA. AM ALES ACEASTĂ PROBLEMĂ CA SĂ ARĂT CĂ EXPOSE-UL PROFESORULUI POATE FI DECISIV ÎN A-L ORIENTA PE ELEV SPRE SOLUŢIE. IAR, ÎN ESENŢĂ, SOLUŢIA ARATĂ CA MAI JOS.

Problemă (L'Huilier). *Simediana unui vârf este locul geometric al mijloacelor antiparalelelor la latura opusă.*

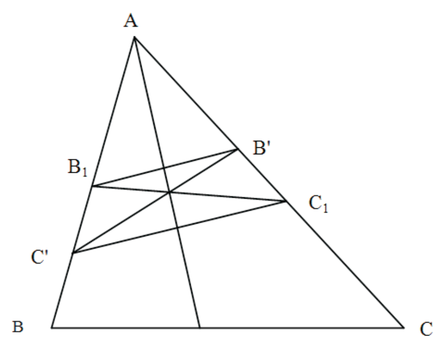


Fig. 5

Demonstraţie. Se consideră triunghiul ABC cu antiparalela $B'C'$. Efectuând o simetrie în raport cu bisectoarea unghiului A, punctul B' se transformă în B_1, iar punctul C' în C_1. Din congruenţa triunghiurilor $AB'C'$ şi AB_1C_1 (L.U.L.), rezultă că unghiul AB_1C_1 este congruent cu unghiul ABC, deci B_1C_1 este paralelă cu BC. Cum mijlocul segmentului $(B'C')$ se transformă în mijlocul segmentului (B_1C_1), teorema revine la următoarea problemă de loc geometric: *locul geometric al mijloacelor segmentelor paralele cu o latură a unui triunghi şi cu capetele pe celelalte două laturi este mediana triunghiului, corespunzătoare laturii paralele cu segmentele.*

Rezultă că locul geometric căutat este transformata prin simetrie faţă de bisectoarea unghiului BAC a medianei corespunzătoare vârfului A, deci simediana din A.

4. Lecţie la dispoziţia profesorului: PUNCTUL LUI TORRICELLI - FERMAT

DACĂ AR FI SĂ ALEG DINTRE LECŢIILE PE CARE LE PREZINT ACUM UNA DE SUFLET, ACEASTA AR FI. DE CE? PROBABIL ESTE CEA MAI PLINĂ DE CONŢINUT. SOLUŢIA GEOMETRICĂ POATE FI ÎNŢELEASĂ UŞOR. EA TRECE PRIN PATRULATERE INSCRIPTIBILE ŞI TEOREMELE LUI PTOLOMEU. ÎNSĂŞI ACESTE TEOREME SUNT MICI PERLE ÎN GEOMETRIA ELEMENTARĂ. PRIMA DIN ELE, CEA PENTRU PATRULATERE INSCRIPTIBILE ESTE FOARTE IMPORTANTĂ ŞI PENTRU CĂ PRODUCE O DEMONSTRAŢIE A TEOREMEI LUI PITAGORA ÎN CAZUL ÎN CARE PATRULATERUL ESTE DREPTUNGHI. CELELALTE DOUĂ SUNT BIJUTERII. PRIMA APELEAZĂ LA PROPRIETATEA OPTICĂ A ELIPSEI. AJUNGEM IARĂŞI LA PRINCIPIUL LUI FERMAT DINTR-UN ALT PUNCT DE VEDERE. DECI FIZICĂ! ULTIMA DEMONSTRAŢIE ESTE O BIJUTERIE. FIRE ŞI GREUTĂŢI, ENERGIE POTENŢIALĂ ŞI POZIŢIE DE ECHILIBRU PENTRU UN SISTEM CU LEGĂTURI. GENERALIZAREA ÎMI APARŢINE. AM LĂSAT-O ÎN TEXT DOAR PENTRU A SUGERA PROFESORULUI ÎNTREBAREA: CUM ARATĂ ACEASTA ÎN 3-D?

Teorema 1 (Torricelli). *Se consideră triunghiul ABC, cu toate unghiurile strict mai mici decât 120^o, şi pe laturile triunghiului se construiesc în exterior triunghiuri echilaterale. Cercurile circumscrise acestor triunghiuri au un punct comun.*

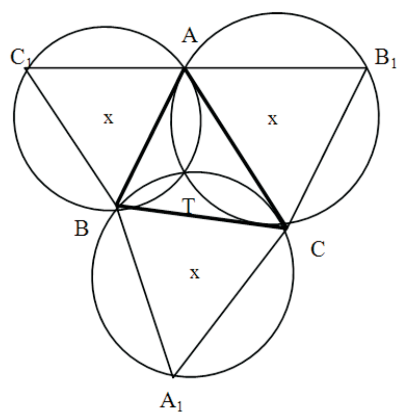


Fig. 6

Demonstraţie. Fie T punctul de intersecţie a cercurilor circumscrise triunghiurilor ABC_1 şi ACB_1. Se demonstrează că patrulaterul $BTCA_1$ este inscriptibil. Pentru aceasta, se observă că patrulaterele C_1BTA şi TCB_1A, fiind inscriptibile, implică $m(\sphericalangle BTA) = m(\sphericalangle ATC) = 120^o$, de unde rezultă că patrulaterul $BTCA_1$ este inscriptibil.

Observaţie. În felul acesta s-a demonstrat şi că există un unic punct T din plan, cu proprietatea că unghiurile $\sphericalangle ATB, \sphericalangle ATC, \sphericalangle BTC$ au 120^o, deoarece T trebuie să aparţină simultan celor trei cercuri considerate. Punctul T se numeşte *punctul lui Torricelli* pentru triunghiul ABC.

Teorema 2 (Torricelli). *Se consideră triunghiul ABC, cu toate unghiurile strict mai mici decât 120^o, şi triunghiurile echilaterale AB_1C, AC_1B, BC_1A, construite în exterior, ca în teorema precedentă. Atunci:*
a) dreptele AA_1, BB_1, CC_1 sunt concurente;
b) $AT + BT + CT = AA_1 = BB_1 = CC_1$.

Demonstraţie. Fie T punctul de concurenţă a cercurilor din problema precedentă. Se demonstrează că punctele A, T şi A_1 sunt coliniare, de unde va rezulta că dreptele AA_1, BB_1, CC_1 sunt concurente în T.

Unind T cu A_1 se obţin: $m(\sphericalangle A_1TC) = m(\sphericalangle CBA_1) = 60^o$ şi $m(\sphericalangle ATC) = 120^o$, deci unghiul $m(\sphericalangle ATA_1) = 180^o$.

Pentru punctul b) se procedează în felul următor: $AA_1 = AT + TA_1$. Din teorema lui Ptolomeu aplicată pentru patrulaterul inscriptibil $BTCA_1$ (în care triunghiul BCA_1 este echilateral) rezultă $BT + TC = TA_1$ (relaţia lui Schooten).

Teorema 3 (Fermat). *Punctul T, considerat anterior, are proprietatea că realizează minimul sumei $MA + MB + MC$, cu M punct din planul triunghiului ABC.*

Demonstraţia 1. Fie M în planul triunghiului ABC. Cel puţin unul dintre patrulaterele MAB_1C, MBA_1C, MAC_1B este convex. Fie acesta MBA_1C. Aplicând inegalitatea lui Ptolomeu, rezultă: $MA_1 \leq MB + MC$, deci se obţine că: $AA_1 \leq MA + MA_1 \leq MA + MB + MC$.

Folosind teorema 2 rezultă: $TA + TB + TC \leq MA + MB + MC$, cu egalitate dacă şi numai dacă $M \equiv T$.

Demonstraţia 2 (folosind proprietatea optică a elipsei). Fie M acel punct din plan pentru care suma $MA + MB + MC$ este minimă. Se demonstrează că unghiurile AMB, AMC, BMC au măsura de 120^o de unde va rezulta, folosind observaţia teoremei 1, că $M \equiv T$.

Fie elipsa de focare B şi C, care trece prin M, şi cercul de centru A şi rază AM.

Cele două curbe sunt tangente în punctul M, deoarece, în caz contrar, considerând un punct de pe arcul de elipsă din interiorul cercului de rază AM, suma distanţelor sale la B şi C este egală ca valoare tot cu $MB + MC$ (din definiţia elipsei), iar distanţa de la punct la A este mai mică decât MA (punctul fiind situat în interiorul cercului), contradicţie cu faptul că în M suma $MA+MB+MC$ este minimă. Fie tangenta în M la cele două curbe, d. Rezultă că $AM \perp d$, deci AM normală la elipsă în M. Conform proprietăţii optice a elipsei, AM este bisectoare pentru unghiul BMC, deci $\sphericalangle AMB \equiv \sphericalangle AMC$. Analog se demonstrează că $\sphericalangle AMB \equiv \sphericalangle BMC$, de unde rezultă că unghiurile AMB, BMC, CMA au măsura de 120^o, deci $M \equiv T$.

Demonstraţie (Töpliz). Se consideră punctele A, B, C ca fiind găuri într-o masă, şi un sistem de trei fire înnodate într-un punct P (situat deasupra masei), trecute prin găurile A, B, C.

Se pun trei mase egale la capetele firelor şi se lasă sistemul să ajungă în echilibru stabil. Se va demonstra că punctul P în echilibru are proprietatea $PA+PB+PC$ minim şi este tocmai punctul T al lui Toricelli. Pentru aceasta este suficient să se demonstreze că unghiurile APB, APC şi BPC sunt congruente. Energia potenţială a sistemului de fire şi greutăţi (considerând pragul de potenţial deasupra masei) este $-mg(AA_1 + BB_1 + CC_1)$ şi deoarece sistemul este în echilibru, energia sa potenţiala este minimă, deci suma $AA_1 + BB_1 + CC_1$ este maximă.

Cum lungimea totală a firelor este constantă, rezultă că suma $AP + BP + CP$ este minimă. Pe de altă parte, rezultanta celor trei vectori ce acţionează în direcţiile firelor fiind nulă (sistemul este în echilibru), rezultă că unghiurile APB, APC şi BPC sunt congruente.

Generalizare. *Se consideră un tetraedru $[ABCD]$ şi P acel punct din interiorul tetraedrului pentru care suma $PA + PB + PC + PD$ este minimă. Atunci $\sphericalangle APB \equiv \sphericalangle CPD$ şi bisectoarele unghiurilor APB şi CPD sunt în prelungire.*

Demonstraţie. Refăcând raţionamentul anterior, pentru un sistem de patru fire la capete, cu greutăţi egale (unul din fire fiind trecut peste un scripete), poziţia de echilibru a sistemului se realizează pentru acel punct P, pentru care suma $PA+PB+PC+PD$ este minimă. Considerând patru vectori egali pe direcţiile firelor şi grupându-i doi câte doi, rezultantele lor sunt egale şi de sens contrar, deci bisectoarele unghiurilor sunt în prelungire, iar din faptul că sunt egale, unghiurile APB şi CPD sunt egale.

5. Lecţie la dispoziţia profesorului: PROBLEMA LUI ŢIŢEICA

Problemă (Gheorghe Ţiţeica). *Trei cercuri $\mathscr{C}(O_1, R), \mathscr{C}(O_2, R), \mathscr{C}(O_3, R)$ au un punct comun. Luându-le două câte două, se obţin încă trei puncte de intersecţie, A, B, C. Cercul determinat de punctele A, B şi C are raza egală cu R.*

Demonstraţia 1. Fie H punctul comun celor trei cercuri (Fig. 7). Patrulaterul O_3AO_2H este romb, deoarece $AO_3 = O_2H = R = AO_2 = O_3H$. De asemenea, patrulaterul O_1BO_3H este romb. Rezultă că $AO_2 \parallel O_3H \parallel BO_1$ şi, deoarece $AO_2 = BO_1 = R$, se obţine că patrulaterul ABO_1O_2 este paralelogram. Deci $AB = O_1O_2$. Analog, se obţin: $BC = O_2O_3$ şi $LA = O_3O_1$. Prin urmare, triunghiurile ABC şi $O_1O_2O_3$ sunt congruente. Centrul cercului circumscris triunghiului $O_1O_2O_3$ are centrul în punctul H şi raza $HO_1 = HO_2 = HO_3 = R$. Prin urmare, cercul determinat de punctele A, B, C are raza R.

Demonstraţia 2. Paralela dusă prin punctul C la dreapta AB intersectează cercul $\mathscr{C}(O_2, R)$ în punctul D. Deci $m(\sphericalangle ADC) = m(\sphericalangle ADH) + m(\sphericalangle HDC) = m(\sphericalangle ABH) + m(\sphericalangle HBC) = m(\sphericalangle ABC)$. Rezultă că patrulaterul $ABCD$ este paralelogram. Triunghiurile ABC şi ADC fiind congruente, rezultă că cercul circumscris triunghiului ABC este congruent cu cercul $\mathscr{C}(O_2, R)$ circumscris triunghiului ADC.

Demonstraţia 3. Se consideră un reper cartezian, având ca origine punctul H, comun celor trei cercuri date şi fie Z_1, Z_2, Z_3 afixele punctelor O_1, O_2, O_3. Mijloacele segmentelor $[O_1O_2], [O_1O_3]$ şi $[O_2O_3]$ au, respectiv, afixele $\frac{Z_1+Z_2}{2}$, $\frac{Z_1+Z_3}{2}$ şi $\frac{Z_2+Z_3}{2}$. Rezultă că punctele A, B şi C au, respectiv, afixele $Z_1 + Z_2$, $Z_1 + Z_3$ şi $Z_2 + Z_3$. Deci

$$AB = |Z_1 + Z_3 - Z_2 - Z_3| = |Z_1 - Z_2| = O_1O_2.$$

Analog se obţin: $BC = O_2O_3$ şi $AC = O_1O_3$. Prin urmare, triunghiurile ABC şi $O_1O_2O_3$ sunt congruente. Deci, cercul circumscris triunghiului ABC are raza egală cu R.

NUMAI IMAGINAŢIA ESTE CEA CARE POATE SĂ FACĂ SĂ APARĂ O ASTFEL DE SOLUŢIE CA SOLUŢIA 4.

DE FAPT, ÎN SPATELE ACESTEI PROBLEME ESTE MAI MULT DECÂT ATÂT. PROBLEMA ESTE O MOSTRĂ DE GEOMETRIE ABSOLUTĂ ŞI, PRACTIC, CERCURILE NU AU DE CE SĂ APARĂ ÎN ENUNŢ. ENUNŢUL POATE FI SCRIS ÎN EGALITĂŢI DE SEGMENTE.

Soluţia spaţială face să se înţeleagă foarte bine această abordare. Este de preferat ca profesorul să introducă o mică porţiune în lecţie, porţiune în care abordează istoria apocrifă a problemei, câteva detalii despre Gheorghe Ţiţeica, familia Ţiţeica şi despre George Pólya.

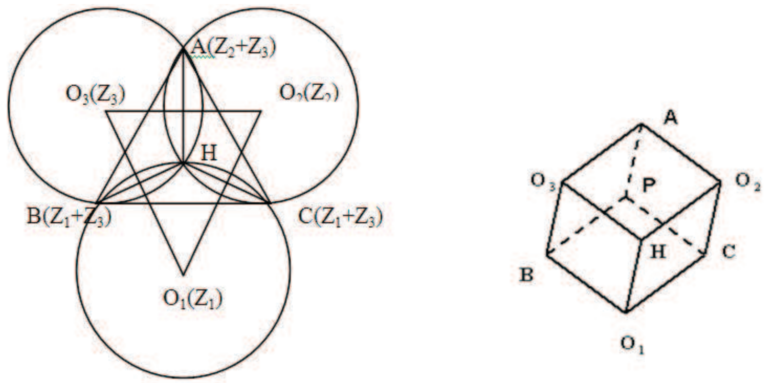


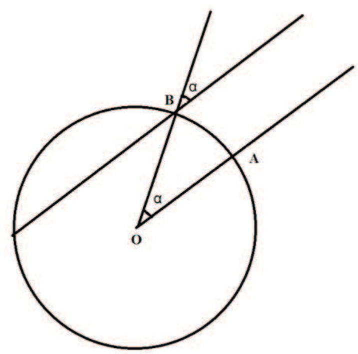
Fig. 7

Demonstraţia 4 (George Pólya). Fie trei cercuri congruente care trec prin punctul H şi care se mai intersectează două câte două în punctele A, B, C. Se consideră, separat, hexagonul $AO_3BO_1CO_2$, format din romburile AO_3HO_2, BO_1HO_3 şi CO_2HO_1. Acesta reprezintă desenul spaţial al unui cub în care nu se vede vârful din spate, P, ce are proprietatea $PA = PB = PC = R$. Deci, prin punctele A, B, C trece un cerc de rază R.

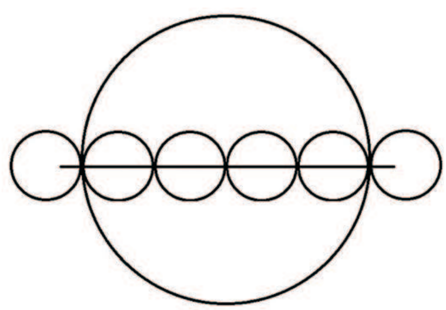
6. Lecţie la dispoziţia profesorului: MĂSURÂND LUMEA

Eratostene s-a născut la Cirene, în Libia de astăzi, în anul 276 î. Hr. Mintea lui strălucită ,,locuia" într-un trup de sportiv care participa cu mult succes la probele de pentatlon, fiind chiar poreclit *Pentathlos* pentru performanţele sale. Eratostene a fost unul dintre bibliotecarii şefi ai Bibliotecii din Alexandria. Aceasta nu era o funcţie administrativă, ci o onoare care era conferită unui om de ştiinţă, un rang academic, de fapt cel mai înalt rang academic pe care putea să îl obţină o persoană la acea vreme. Eratostene a fost printre acei filozofi greci care au înţeles prin observaţie că Pământul are curbură, deci trebuie să fie rotund. Trebuia să semene cu Luna şi cu Soarele. Deci, corpul geometric cu care seamănă Pământul era o sferă. Dar cum am putea să calculăm raza?

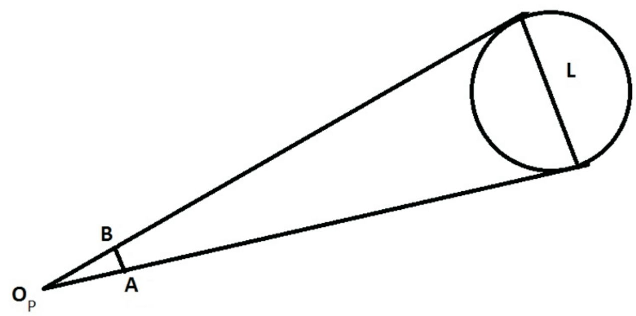
Eratostene a folosit umbra unui băţ la Alexandria pentru a calcula circumferinţa Pământului. Umbra făcută de băţ la amiază determina un unghi de aproximativ 7,2 grade în vârful băţului. Asta înseamnă că în centrul Pământului, băţul intersectează imaginar raza de Soare corespunzătoare puţului din Syene tot într-un unghi de 7,2 grade, unghiurile fiind alterne interne. Deci pe cercul imaginar care trece prin Alexandria, Syene, Polul Nord şi Polul Sud, unghiul la centrul Pământului între Alexandria şi Syene este de 7,2 grade. Eratostene a măsurat distanţa dintre Alexandria şi Syene şi a constatat că este de 800 km. Dar asta înseamnă că pentru $\frac{1}{50}$ din circumferinţa Pământului corespund 800 km. Circumferinţa Pământului este de aproximativ 40 000 km. Evident apar aproximaţii în astfel de calcule. Syene nu este pe acelaşi meridian cu Alexandria şi distanţa nu este 800 de km, fix. Dar, pentru prima data în istoria omenirii, cineva putea spune cu o aproximaţie bună cât este circumferinţa Pământului. Asta însemna că diametrul său este de aproximativ 12 800 km, deci raza sa este de aproximativ 6 400 km.



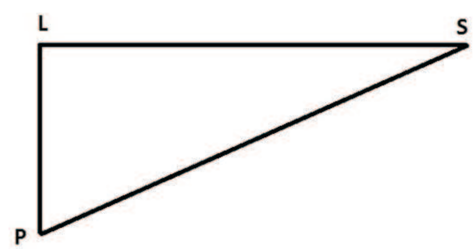
Cum să găsim diametrul Lunii? Eratostene a observat că în cazul eclipselor de Lună, din momentul în care Luna atinge conul de umbră până când intră complet în conul de umbră trec exact 50 de minute. Asta înseamnă că diametrul Lunii corespunde la 50 de minute de acoperire. Eclipsa durând 200 de minute, înseamnă că diametrul Pământului de 12 800 km este acoperit de 4 diametre de Lună. Or asta înseamnă că diametrul Lunii este de 4 ori mai mic decât diametrul Pământului, adică este de aproximativ 3 200 km.



Dar distanţa de la Pământ la Lună? Eratostene a observat că întinzând braţul, unghia degetului mare corespunzător braţului întins acoperă Luna. Cum raportul dintre mărimea unghiei şi mărimea braţului este de aproximativ 1/100, rezultă că distanţa Pământ - Lună este de aproximativ 320 000 km.

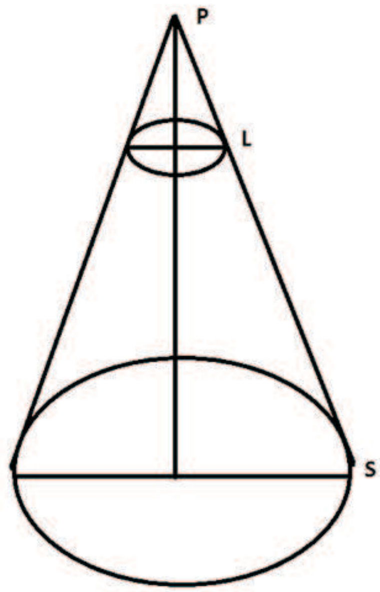


Aristarh este cel care a perseverat în calcul distanţei Pământ - Soare. El a observat că există zile în care Luna apare pe cerul zilei. Şi a observat că în unele dintre aceste zile Luna are umbra exact jumătate din suprafaţa sa. Deci, sistemul Soare - Lună - Pământ face un unghi de 90 de grade cu vârful în centrul Lunii. Într-o astfel de zi a calculat unghiul dintre Soare - Pământ - Lună. Observaţia sa este că acel unghi ar fi fost de 87 de grade. În realitate, el este de 89,85 grade. Pentru acel unghi de 87 de grade a calculat cosinusul măsurând un triunghi dreptunghic făcut din sfori cu unghiul de 87 de grade. Şi a ajuns la concluzia că Soarele este de 20 de ori mai departe decât Luna, adică la aproximativ 6 400 000 km. În realitate, Soarele este, conform unghiului de 89,95 grade, de 400 de ori mai depărtat de noi decât Luna. Deci, distanţa corectă este de aproximativ 140 000 000 km. Însă, ceea ce conta era faptul că se stabilise un mod ştiinţific de a se calcula distanţa până la Soare. Precizia măsurătorilor depinde de aparatele de măsură. Şi cel mai important lucru este că acel mod ştiinţific avea, ca limbaj, matematica.



Anaxagoras este cel care a calculat diametrul aproximativ al Soarelui. Ideea de a folosi o observaţie astronomică nu era nouă. Am văzut cum eclipsa totală de

Lună ne-a permis să calculăm diametrul Lunii. Anaxagoras a folosit triunghiurile asemenea ce apar într-o eclipsă totală de Soare pentru a calcula diametrul Soarelui prin intermediul diametrului Lunii, distanţei Pământ - Lună şi distanţei Pământ - Soare. Rezultatul este de aproximativ 1,40 milioane de km.



Ceea ce este important este că savanţii greci au reusit să înţeleagă că diametrul Soarelui depindea de determinarea distanţei Pământ - Soare. Care distanţă, depindea de determinarea distanţei Pământ - Lună şi de diametrul Lunii. Care diametru depinde de diametrul Pământului.

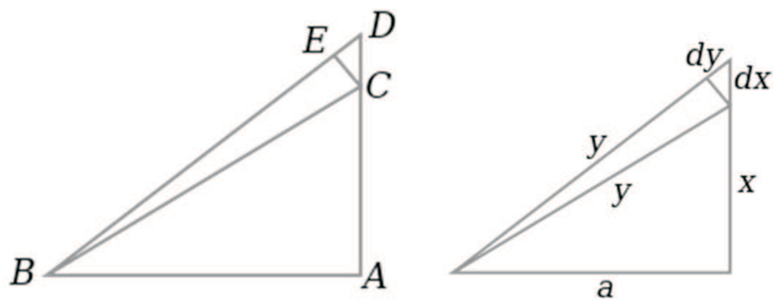
Toate aceste idei pot fi regăsite în cuvintele matematicianului francez Henri Poincaré, cel care a publicat ideile teoriei restrânse a relativităţii într-un articol, înaintea articolului asupra aceluiaşi subiect, publicat de Albert Einstein:

Omul de ştiinţă nu studiază natura pentru folosul pe care-l poate obţine de la ea; el o studiază fiindcă asta îl încântă, şi îl încântă fiindcă natura este frumoasă. ... şi nu este vorba de acea frumuseţe care îţi stârneşte simţurile. Eu vorbesc aici de frumuseţea care provine din ordinea şi armonia părţilor şi pe care numai o inteligenţă pură o poate sesiza.

7. Lecţie la dispoziţia profesorului: TEOREMA LUI PITAGORA, PRIN ANALIZĂ MATEMATICĂ

ACEASTĂ SCURTĂ LECŢIE ESTE O PERLĂ. AM TESTAT-O, CA ŞI PE CELELALTE LECŢII, PE MAI MULTE PERSOANE. LA SFÂRŞIT EXISTĂ O SINGURĂ REACŢIE: WOW!

Triunghiul ABC este un triunghi dreptunghic cu unghiul drept în A. Lungimile laturilor triunghiului sunt: ipotenuza $BC = y$, cateta $AC = x$ şi cateta $AB = a$.



Dacă x creşte cu o valoare mică $\mathrm{d}x$, prin extinderea laturii AC către D, atunci y creşte cu $\mathrm{d}y$. Acestea formează două laturi ale unui triunghi, CDE, care (cu E ales astfel încât dreapta CE să fie perpendiculară pe ipotenuză) este un triunghi dreptunghic asemenea cu triunghiul ABC. De aceea, rapoartele dintre laturile lor respectă teorema fundamentală a asemănării, adică:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x}{y}.$$

Rezultă $y\,\mathrm{d}y = x\,\mathrm{d}x$, adică $\int y\,\mathrm{d}y = \int x\,\mathrm{d}x$. Se obţine $\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + c$, unde c este o constantă. Constanta poate fi dedusă din observaţia: $x = 0$ conduce la $y = a$. Se obţine, astfel, teorema lui Pitagora, $y^2 = x^2 + a^2$. WOW!

8. Anexă

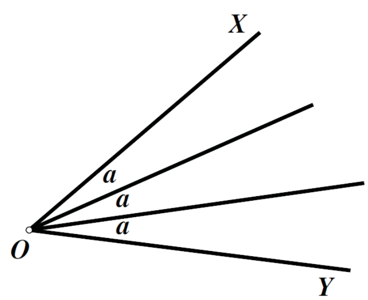
UNEORI, ALGEBRA NU ESTE CEEA CE PARE A FI

Ştiu că titlul ales poate induce ideea că algebra este ceva anost şi plictisitor, dar prin exemplul pe care îl vom vedea ea ne va apărea strălucitoare şi inedită. Algebra este întotdeauna strălucitoare iar în lecţia de mai jos vom afla că algebra, interpretată convenabil, poate deveni geometrie. Am să enunţ o teoremă de geometrie cunoscută încă din anul 1899: **Teorema lui Morley**.

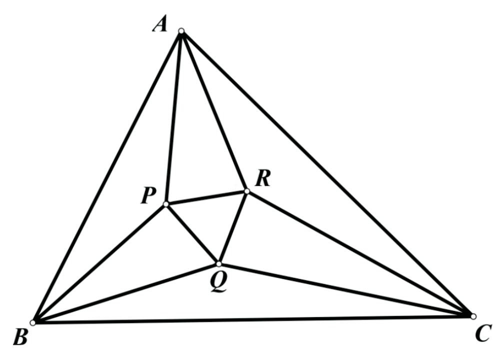
Enunţul este simplu şi elegant:

Pentru orice triunghi, punctele de intersecţie a trisectoarelor adiacente formează un triunghi echilateral.

Considerăm triunghiul ABC, în care trisectoarele adiacente ale celor trei unghiuri se intersectează în punctele P, Q şi, respectiv, R.



Trisectoarele unui unghi *XOY*



Să arătăm că triunghiul PQR este echilateral.

Se cunosc mai multe demonstraţii geometrice, trigonometrice, prin construcţii auxiliare etc. Vom povesti cea mai frumoasă soluţie, soluţie găsită de matematicianul francez Alain Connes pe când era invitat într-un stagiu de cercetare la IHES şi publicată apoi, în 1988. Trebuie să menţionez că Alain Connes este medaliat Fields şi, de fapt, asta spune totul.

Anecdota povestită de Alain Connes pe seama acestei teoreme începe cu reconstituirea unei atmosfere de prânz la restaurantul institutului. Prânz în care savuroasele şi distinsele produse culinare franţuzeşti, cel mai probabil, stropite cu un Bordeaux, îi fac pe comeseni să discute, evident matematică. Cineva de la masă menţionează teorema anterioară şi i-o atribuie în mod eronat lui Napoleon. Ca problemă, lui Alain Connes i se pare interesantă şi pleacă de la masă pornit să o rezolve. Mai ales că, gândea Connes, dacă a putut fi rezolvată de Napoleon, nu se poate ca el să nu o rezolve. Dar problema rezistă.

După mai mult timp, Alain Cannes produce soluţia care, pentru orice problemist, ar putea fi soluţia vieţii. În cele ce urmează vom vedea varianta accesibilă a acestei soluţii.

Teoremă (Alain Connes). *Dacă* $f_k : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f_k(z) = a_k z + b_k$, $k \in \overline{1,3}$, $a_k \notin \{0,1\}$, $a_k \cdot a_l \neq 1$, $\forall k \neq l$, $k,l \in \{1,2,3\}$, *iar* $t = a_1a_2a_3 \neq 1$, *atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1) $f_1^3 \circ f_2^3 \circ f_3^3 = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$*;*

2) $t^3 = 1$ *şi* $\alpha + \beta t + \gamma t^2 = 0$*, unde* α, β, γ *sunt punctele fixe ale lui* $f_1 \circ f_2$, $f_2 \circ f_3$, $f_3 \circ f_1$.

Demonstraţie. Câteva observaţii: $(f_1 \circ f_2)(z) = f_1(f_2(z)) = a_1 f_2(z) + b_1 = a_1(a_2 z + b_2) + b_1$ implică $(f_1 \circ f_2)(z) = a_1a_2z + a_1b_2 + b_1$. Ca urmare, concluzionăm că:

i) $(f_1 \circ f_2)(z) = a_1a_2z + a_1b_2 + b_1$, $(f_2 \circ f_3)(z) = a_2a_3z + a_2b_3 + b_2$, $(f_3 \circ f_1)(z) = a_3a_1z + a_3b_1 + b_3$ au punctele fixe

$$\alpha = \frac{a_1b_2a_3 + b_1a_3}{a_3 - t}, \beta = \frac{a_2b_3a_1 + b_2a_1}{a_1 - t}, \gamma = \frac{a_3b_1a_2 + b_3a_2}{a_2 - t}.$$

ii) $f_1^3(z) = (f_1 \circ f_1 \circ f_1)(z)$, deci $f_1^3(z) = a_1^3 z + b_1(a_1^2 + a_1 + 1)$ şi, analog, $f_2^3(z) = a_2^3 z + b_2(a_2^2 + a_2 + 1)$, $f_3^3(z) = a_3^3 z + b_3(a_3^2 + a_3 + 1)$.

Ca urmare $f_1^3 \circ f_2^3 \circ f_3^3 = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$ este echivalentă cu $a_1^3a_2^3a_3^3 z + a_1^3a_2^3b_3(a_3^2 + a_3 + 1) + a_1^3b_1(a_2^2 + a_2 + 1) + b_1(a_1^2 + a_1 + 1) \equiv z$.

Deci, $t^3 = a_1^3a_2^3a_3^3$ şi $a_1^3a_2^3b_3(a_3^2+a_3+1)+a_1^3b_1(a_2^2+a_2+1)+b_1(a_1^2+a_1+1) = 0$.

Ori, prin calcul, se arată că egalitatea cu 0, de deasupra, este de fapt $\alpha + \beta t + \gamma t^2 = 0$, după ce înlocuim $t^2 = -t - 1$ şi α, β, γ cu formulele din i).

Acum vom arăta că teorema anterioară scrisă pentru nişte funcţii f_1, f_2, f_3, particulare, este **teorema lui Morley**.

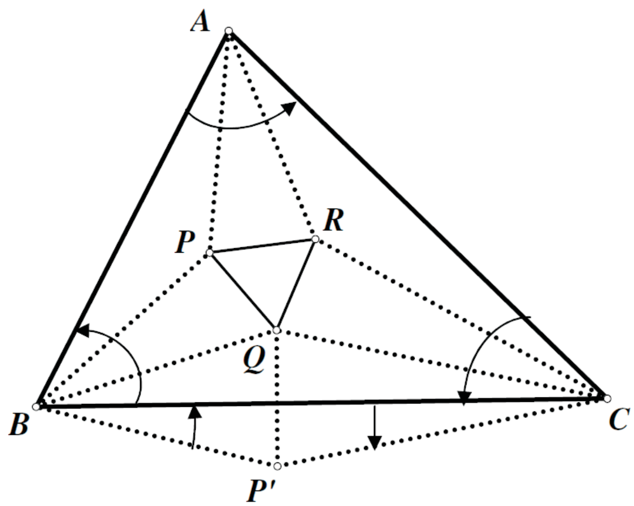
Desenăm triunghiul ABC şi orientăm unghiurile A, B, C ca în desenul de mai jos.

Considerăm funcţiile $f_1 = R_B\left(\frac{2B}{3}\right)$, $f_2 = R_C\left(\frac{2C}{3}\right)$, $f_3 = R_A\left(\frac{2A}{3}\right)$, unde, prin $R_B\left(\frac{2B}{3}\right)$ se înţelege rotaţia de centru B şi de unghi $\frac{2B}{3}$, în direcţia considerată de sensul unghiului orientat.

Deci f este de forma $f_1(z) = \left(\underbrace{\cos\frac{2B}{3} + i\sin\frac{2B}{3}}_{a_1}\right) z + b_1$, unde b_1 se exprimă în funcţie de originea aleasă în plan. Ca urmare,

$$a_1a_2a_3 = \cos\left(\frac{2A}{3} + \frac{2B}{3} + \frac{2C}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2A}{3} + \frac{2B}{3} + \frac{2C}{3}\right) = \varepsilon,$$

cu $\varepsilon^3 = 1$.



Ne uităm la desenul anterior. Se observă că $(f_1 \circ f_2)(P) = f_1(P') = P$, deci P este punct fix pentru $f_1 \circ f_2$. Să-l notăm cu α. Analog, $(f_2 \circ f_3)(Q) = Q, Q = \beta$, şi $(f_3 \circ f_1)(R) = R, R = \gamma$.

Rămâne de arătat că $f_1^3 \circ f_2^3 \circ f_3^3 = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$.

f_1^3 este o funcţie liniară cu coeficienţii determinaţi, deci comportamentul ei poate fi descris prin modul ei de acţiune asupra unui singur punct.

Rezultă $f_1^3(P') = f_1^3(\alpha') = f_1^2(f_1(\alpha')) = f_1^2(\alpha) = \alpha''$, deci $f_1^3 = s_{AB} \circ s_{BC}$, unde s_{BC} este simetria faţă de BC iar s_{AB} este simetria faţă de AB. Analog, $f_2^3 = s_{BC} \circ s_{AC}$ şi $f_3^3 = s_{AC} \circ s_{AB}$.

Ca urmare, $f_1^3 \circ f_2^3 \circ f_3^3 = s_{AB} \circ s_{BC} \circ s_{BC} \circ s_{AC} \circ s_{AC} \circ s_{AB} = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$.

Deci α, β, γ verifică relaţia $\alpha + \varepsilon\beta + \varepsilon^2\gamma = 0$ ceea ce înseamnă că sunt afixele vârfurilor unui triunghi echilateral.

Să ne mai uităm odată la enunţul lui Alain Connes:

Dacă $f_k : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f_k(z) = a_kz + b_k$, $k \in \overline{1,3}$, $a_k \notin \{0,1\}$, $a_k \cdot a_l \neq 1$, $\forall k \neq l$, $k, l \in \{1,2,3\}$, ***iar*** $t = a_1a_2a_3 \neq 1$, ***atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:***

1) $f_1^3 \circ f_2^3 \circ f_3^3 = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$;

2) $t^3 = 1$ ***şi*** $\alpha + \beta t + \gamma t^2 = 0$*, unde* α, β, γ *sunt punctele fixe ale lui* $f_1 \circ f_2, f_2 \circ f_3, f_3 \circ f_1$.

Pentru cazul particular al rotaţiilor $R_A\left(\frac{2A}{3}\right), R_B\left(\frac{2B}{3}\right), R_C\left(\frac{2C}{3}\right)$, această teoremă devine **teorema lui Morley**, adică *trisectoarele adiacente ale laturilor unui triunghi se intersectează în trei puncte, vârfuri ale unui triunghi echilateral*.

Algebra nu este ceea ce pare a fi ...

Bibliografie

[1] A. Connes, *A new proof of Morley's theorem*, Publicationes Mathematiques d'IHES, S88, pp. 43-46, 1998.

[2] L. Nicolescu, W.-G. Boskoff, *Probleme practice de geometrie*, Ed. Tehnică, 1990.

[3] S. Singh, *Big Bang. Originea universului*, Ed. Humanitas, 2012.

PROF. UNIV. DR. WLADIMIR-GEORGES BOSKOFF
UNIVERSITATEA OVIDIUS DIN CONSTANŢA

,,TOATE-S VECHI ŞI NOUĂ TOATE.” TEHNICI INOVATIVE ÎN PREDAREA MATEMATICII?

de CĂTĂLIN GHERGHE

Probleme de tip Fermi

Ritmul societăţii actuale impune deseori luarea unor decizii rapide în probleme importante (de zi cu zi) în care datele sunt puţine şi, de cele mai multe ori, nu la îndemână. Informaţiile furnizate de media sau de politicieni sunt de multe ori prezentate în funcţie de numere mari sau de procente ale acestora, interpretarea fiind deseori confuză. Iată (cel puţin) două probleme cu care oamenii se confruntă în viaţa reală şi la rezolvarea cărora poate contribui şi matematica, prin studiul ei în şcoală. O metodă ,,inovativă” ar fi inserarea în orele de predare, în manuale sau chiar în programă a problemelor de tip Fermi şi ,,antrenarea” copiilor în rezolvarea lor.

Enrico Fermi, fizician italian, laureat al premiului Nobel pentru studii ale proceselor nucleare, membru al Proiectului Manhattan, care a dezvoltat bomba atomică, avea o capacitate uimitoare de a rezolva probleme (unele nu foarte uşoare) în minte, pe marginea unui ziar sau pe spatele unui plic (,,back-of-the-envelope questions”), folosind informaţii care, iniţial, nu păreau să conducă la rezultate cantitative, dar care, prin estimări şi aproximări, utilizând operaţii şi concepte de cele mai multe ori elementare, conduceau la un răspuns aflat între nişte limite identificate pe parcurs.

De la cele mai năstruşnice până la cele mai serioase, problemele Fermi sunt exact de acest tip. Câte pungi de popcorn ne trebuie ca să umplem o sală de clasă? Câţi oameni vorbesc la telefon în lume la un moment dat? Care este diferenţa, privind riscul de a avea un accident (mortal), dintre o călătorie cu avionul şi una cu maşina? Cu cât se scurtează speranţa de viaţă în cazul fumătorilor ,,înrăiţi”? Iată câteva exemple de probleme de tip Fermi.

Prezentăm în continuare o propunere de strategie de antrenare în rezolvarea acestui tip de probleme după care vom da câteva exemple.

Strategie de rezolvare

1. Clarificarea cerinţei problemei şi a interpretărilor.
2. (opţional; se testează intuiţia) ,,Ghicirea” răspunsului, fără raţionamente sau calcule.

3. „Spargerea” problemei în probleme mai mici, cu întrebări, la care se poate răspunde mai uşor. Acest lucru se poate face printr-un şir de raţionamente şi calcule bazate pe experienţa de zi cu zi.
4. Efectuarea de presupuneri şi aproximări. Uneori este mult mai uşor să găsim cea mai mică şi cea mai mare valoare posibilă a cantităţii în discuţie. În general, se ia media lor geometrică pentru a estima cantitatea cu un număr care are ordinul de mărime egal depărtat de cele ale marginilor superioară şi inferioară.
5. Aproximările se vor face folosind reprezentarea numerelor sub forma $a \cdot 10^b$, unde $a \in [0, 10)$ şi $b \in \mathbb{Z}$. Aici trebuie să se înţeleagă că exponentul b este cel mai important (el dă ordinul de mărime a cantităţii) după care, importantă este prima cifră a reprezentării lui a, celelalte fiind mici ajustări. Este binecunoscută gluma cu dinozaurul de 75 000 003 ani.
6. După ce se dă răspunsul, care este, evident, o aproximare şi nu unul exact, dacă este posibil, este bine să se compare cu rezultatele statistice existente sau să se verifice practic corectitudinea rezultatului. În cazul unor diferenţe mari, ar trebui să se încerce identificarea surselor de eroare.

Exemplul 1. *Câte bucăţi de popcorn sunt necesare pentru a se umple spaţiul unei săli de clasă? (Problemă uşoară.)*

Rezolvare. Ne gândim că o bucată de popcorn încape într-un cub de latură $1,5$ cm. Deci, într-un cub de latură 5 cm vor intra apoximativ 27 de floricele. Într-un cub de latură 1 m vor intra $8 \cdot 10^3$ cuburi de latură 5 cm şi, deci, într-un spaţiu de 1 m^3 vor intra $27 \cdot 8 \cdot 10^3 = 216 \cdot 10^3$, adică aproximativ $2 \cdot 10^5$ floricele.

Plăcile (în formă de pătrat) de pe tavanul clasei au latura de $0,5$ m. Sala de clasă are 25 de plăci în lungime şi 20 în lăţime şi, deci, are (aproximativ) 13 metri în lungime şi 10 metri în lăţime, adică 130 m^2. Înălţimea sălii de clasă este cam de două ori şi jumătate înălţimea unui elev, deci aproximativ 4 m aşa că volumul sălii de clasă este de aproximativ $5 \cdot 10^2$ m^3.

În final, aproximativ $(2 \cdot 10^5) \cdot (5 \cdot 10^2) = 10^8$ de floricele vor umple sala de clasă.

Exemplul 2. *Câte celule conţine corpul tău? (Problemă mai grea.)*

Rezolvare. Prima întrebare pe care ar fi normal să ne-o punem este: „Cum putem estima volumul corpului nostru?”.

Cel puţin două variante pot fi folosite. Prima ar fi să folosim formula $V = \frac{m}{\rho}$, unde V este volumul, m masa iar ρ este densitatea, densitatea urmând a fi aproximată cu cea a apei. A doua este mai geometrică. Aproximăm volumul corpului cu cel al unui paralelipiped dreptunghic. Presupunem că toată lumea ştie formula volumului, $V = h \cdot l \cdot a$, unde h este înălţimea, l lăţimea iar a adâncimea (dimensiunea faţă-spate). La înălţime este simplu, $h = 1,7$ m. Pentru lăţime, folosind o medie geometrică a dimensiunilor capului, tălpilor, şoldurilor şi umerilor, obţinem aproximativ $l = 0,3$ m iar pentru adâncime $a = 0,2$ m. Obţinem astfel că volumul corpului este aproximativ $V = 1,7 \cdot (3 \cdot 10^{-1}) \cdot (2 \cdot 10^{-1}) = 102 \cdot 10^{-3}$, adică aproximativ $0,1$ m^3.

A doua întrebare normală este: ,,Care este mărimea unei celule?”. Începem prin a ne uita la obiecte foarte mici din preajmă. De exemplu, putem vedea cât de mic este un milimetru privind o riglă gradată şi realizăm că putem vedea ,,ceva” de 10 ori mai mic, adică 10^{-4} m. Inventatorul primului microscop a putut vedea obiecte mărite cu magnitudinea cuprinsă între 10 şi 100. Deci, putem considera că mărimea unei celule este cuprinsă între 10^{-5} şi 10^{-6}, adică între 1 şi 10 micrometri. O vom aproxima cu 10^{-5} m. Există şi o procedură de aproximare când se consideră media geometrică iar suma exponenţilor este impară. Se micşorează această sumă cu 1 şi se înmulţeşte rezultatul cu 3.

Volumul celulei va fi aproximativ $v = d^3 = 10^{-15}$ m^3.

În sfârşit, numărul de celule din corpul uman este $n = \frac{V}{v} = \frac{10^{-1}}{10^{-15}} = 10^{14}$, adică aproximativ 100 de trilioane!

Comentarii. Cele două probleme sunt cunoscute, cea de-a doua este din cartea *Guesstimation*, scrisă de Lawrence Weinstein şi John A. Adam şi publicată în 2008 la Princeton University Press.

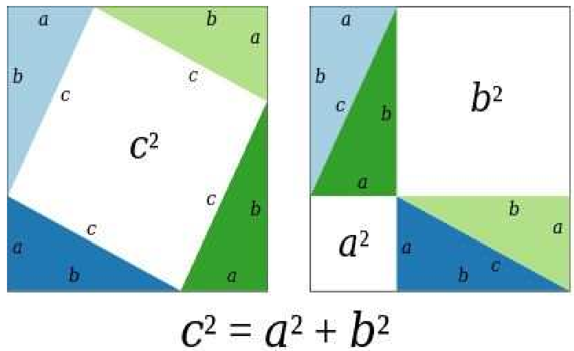
Trebuie remarcat că la interviul de angajare în toate marile companii americane este imposibil ca viitorul angajat să nu primească o problemă de tip Fermi.

Majoritatea problemelor de tip Fermi din literatură sunt, în principal, legate de informaţii generale din SUA. Într-un (posibil) viitor proiect al S.S.M.R. am putea încerca să compunem sau să adaptăm probleme de tip Fermi la specificul societăţii româneşti.

Demonstraţii fără cuvinte (vizuale)

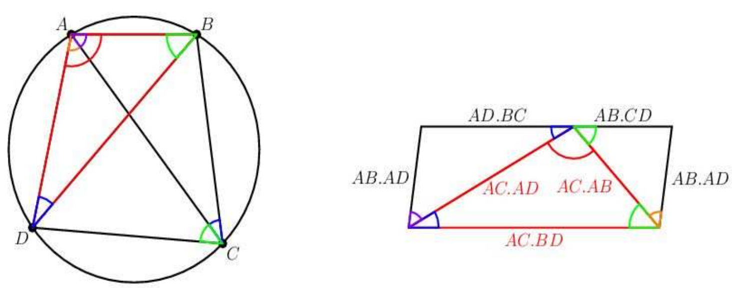
> ,,Un desen face mai mult decât o mie de cuvinte.”

Mulţi profesori de matematică sunt familiarizaţi cu figura de mai jos. Ea provine din (poate) cea mai veche carte de matematică tipărită, *Zhou Bi Suan Jing* (cca. 200 î. Hr.), şi reprezintă o demonstraţie ,,vizuală” a teoremei lui Pitagora. Este, pe lângă (poate) cea mai veche demonstraţie a unui rezultat (important) matematic, primul exemplu de demonstraţie fără cuvinte. În ciuda rădăcinilor antice, demonstraţiile fără cuvinte îşi primesc recunoaşterea oficială abia în 1970 când Mathematics Association of America a propus ca acestea să fie publicate în *Mathematics Magazine* şi *The College Mathematics Journal*. Din acel an, constant au fost publicate mici articole conţinând desene ce voiau să transmită idei matematice într-o manieră pur vizuală. În 1994, Roger B. Nelsen publică *Proofs Without Words: Exercises in Visual Thinking*.



După părerea mea, există cel puţin trei motive ce ,,recomandă" demonstraţiile fără cuvinte ca instrument ajutător în lecţiile de matematică:

1. Oferă posibilitatea de a justifica unele fapte matematice atunci când demonstraţia nu este cerută de programă şi când se pune mai mult accent pe aspectele intuitive. În plus, ele pot fi folosite atunci când nu este timp (fizic) pentru demonstraţii riguroase, dar se doreşte o justificare. Exemplul din figura de mai sus este de această natură, explicaţiile fiind în acest caz de prisos.
2. Înţelegerea demonstraţiilor vizuale permite, apoi, elevului să-şi încerce puterile în redactarea unei demonstraţii riguroase, urmând paşii logici sugeraţi de desenul în cauză.

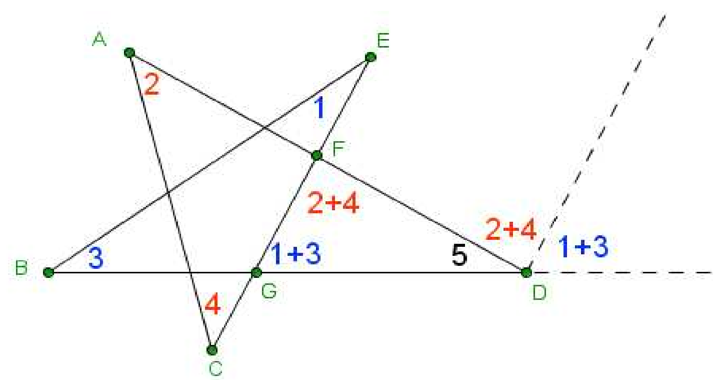


Desenul de mai sus sugerează o demonstraţie a teoremei lui Ptolemeu:

Produsul lungimilor diagonalelor unui patrulater inscriptibil este egal cu suma produselor lungimilor laturilor opuse.

Ideea este să se formeze un paralelogram cu trei triunghiuri asemenea cu trei triunghiuri din patrulaterul iniţial. Mai exact, sunt considerate triunghiurile: ABD cu factorul de proporţionalitate AC, ABC cu factorul de proporţionalitate AD şi ACD cu factorul de proporţionalitate AB. Aceste triunghiuri dau naştere unui paralelogram, urmărind egalităţile dintre unghiurile colorate. Relaţia din teoremă rezultă acum uşor din egalitatea a două laturi opuse din paralelogram.

3. Nu în ultimul rând, demonstraţiile vizuale ar conduce la exemplificarea frumuseţii matematicii, care se pierde deseori în ,,hăţişul" formalismului, folosit nejustificat în multe lecţii.



Desenul de mai sus ne arată că suma unghiurilor unei pentagrame este mereu $180°$.

Nu pot să nu remarc faptul că aceste demonstraţii vizuale au fost puse în ,,drepturile" lor de către ,,omologul" american al S.S.M.R. Ţinând seama de cele expuse mai sus, cred că acest subiect ar putea fi inclus într-un viitor posibil proiect al S.S.M.R.

Matematică prin poveşti sau prin probleme practice

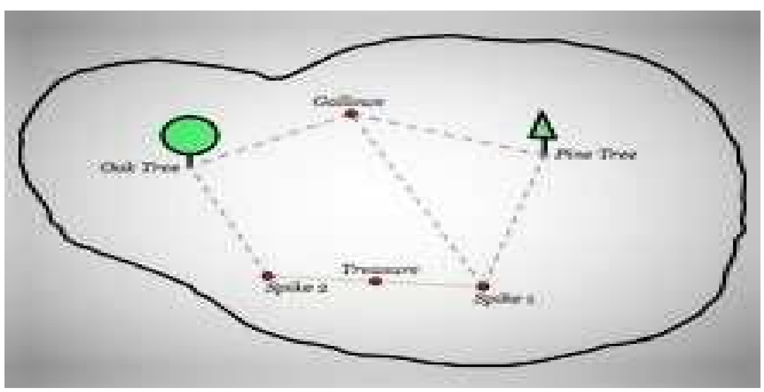
În multe dintre dialogurile cu colegii din învăţământul preuniversitar a apărut întrebarea ,,Cum începem o lecţie?". Mai exact, cum facem să ne atragem ,,publicul", care deseori priveşte ora de matematică blazat (unii) sau cu frică (alţii).

Părerea mea este că multe dintre lecţii ar putea începe cu un ,,puzzle matematic”, cu iz de poveste sau de problemă practică (reală de data aceasta), a cărui rezolvare să se poată face doar după ,,parcurgerea” lecţiei respective. Apare un fenomen psihologic prin care elevul uită pe moment că este la ora de matematică, încercând să înţeleagă ce se petrece la tablă din dorinţa de a descifra ,,puzzle-ul” de la început. O colecţie de astfel de poveşti sau de probleme practice, care să fie ataşate la cât mai multe noţiuni predate în clasă, ar fi foarte utilă şi ar putea constitui un alt punct al unui viitor program al S.S.M.R.

Vom da acum câteva exemple.

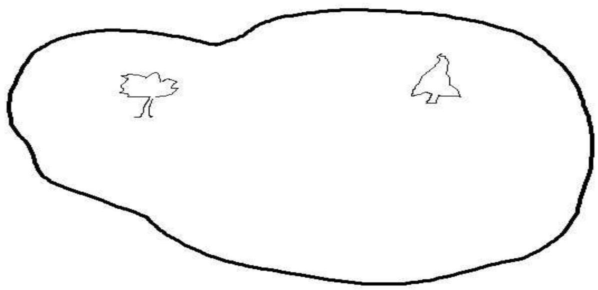
Exemplul 1. Iată o ,,poveste” clasică pe care o găsim în celebra carte *One, Two, Three ... Infinity*, publicată de, nu mai puţin celebrul, George Gamow în 1947 în Viking Press.

Un tânăr aventurier descoperă că a primit prin testament de la străbunicul lui o cutie în care se afla o hartă şi o scrisoare cu explicaţii. În oceanul . . . la latitudinea . . . şi longitudinea . . . se află o insulă părăsită. În partea de nord a insulei vei vedea un stejar şi un pin, dar şi o spânzurătoare. Pleacă de la spânzurătoare către stejar, numără paşii şi, când ajungi la el, întoarce-te către dreapta cu un unghi drept şi mergi până vei parcurge acelaşi număr de paşi cât ai făcut până la stejar. Înfinge aici un ţăruş, întoarce-te la spânzurătoare şi procedează la fel cu pinul, cu diferenţa că acum te vei întoarce la stânga. Bate şi aici un ţăruş. Parcurge acum distanţa dintre cei doi ţăruşi şi la jumătatea distanţei vei găsi îngropată o comoară.



Tânărul porneşte în expediţie, ajunge pe insulă, dar, din păcate, spânzurătoarea nu mai exista. Nemaiavând cum să localizeze comoara, se întoarce trist pentru că nu putea profita de ,,moştenirea” străbunicului lui.

Dacă, însă, tânărul ar fi ştiut numere complexe sau, chiar, geometrie sintetică elementară, ar fi putut descoperi comoara. Aşa, ea va rămâne tot acolo, aşteptând alţi temerari.

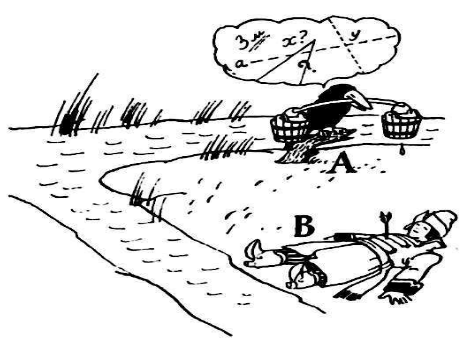


Iată un exemplu care are (în mod normal) darul de a ,,captiva” clasa. Acum, profesorul nu trebuie să le spună decât că doar dacă vor fi atenţi şi vor înţelege ce se va preda vor putea descifra ,,misterul”.

Problema admite cel puţin trei metode de rezolvare şi, deci, ar putea fi folosită la diferite niveluri de predare. O soluţie este elementară, folosind doar asemănări de triunghiuri (cl. a VII-a), o alta folosind numere complexe, unde s-ar putea înţelege mai bine adevărata natură a unui număr complex, cea de rotaţie (cl. a X-a), şi alta folosind geometria analitică (cl. a X-a sau cl. a XI-a).

Exemplul 2. Următoarea poveste este din cartea *Transformation Groups for Beginners*, scrisă de S. Duzhin şi B. Chebotarevsky, apărută la AMS în 2004. Ei propun următoarea poveste, prelucrată din folclorul rus.

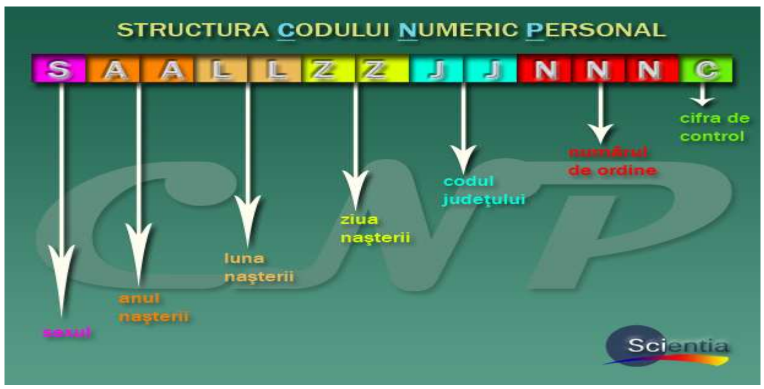
Un tânăr prinţ este rănit iar corbul, singurul lui prieten, trebuie să-i aducă cât mai repede apa morţii şi apa vieţii, pe care le poate lua din cele două râuri (vezi imaginea). Cum o poate face?



Povestea este potrivită pentru clasa a VII-a, când se învaţă despre mediatoare, sau pentru clasa a XI-a, când ar trebui să se înveţe despre simetrii axiale (poate când vom avea o nouă programă!).

Exemplul 3. Acesta este un exemplu la limita dintre practică şi ,,magie", adică tot ... poveste. Profesorul ar putea să le propună copiilor la începutul orei un număr de ,,magie". Cineva din clasă să-i spună CNP-ul fără prima cifră, al unuia dintre elevi, fără a zice al cui este. Profesorul ar trebui să ,,ghicească" dacă elevul este băiat sau fată.

De exemplu: Posesorul acestui CNP: X 8 9 1 1 1 3 3 4 1 1 8 1 este băiat sau fată?



Intenţionat nu am dat soluţiile aici tocmai pentru a verifica dacă cititorul (care nu cunoaşte problemele) a fost atras şi curios să le rezolve.

Să(-i) învăţăm din greşeli

,,Singura eroare reală este aceea din care nu înveţi nimic". Un profesor bun este (şi) acela care foloseşte erorile ,,posibile"' sau erorile ,,întâmplate" pentru a-i face pe elevi să înţeleagă mai bine un concept, o demonstraţie sau un algoritm de calcul. După părerea mea, un profesor trebuie, pe de o parte, să accepte ,,dreptul" elevului de a greşi (mai ales când apar situaţii noi şi schemele clasice nu mai pot fi aplicate) şi, pe de altă parte, să observe erorile elevilor şi să le înţeleagă (elevii nu fac erori matematice ,,premeditate", ei cred, de cele mai multe ori, că ceea ce fac este corect!).

Un fapt constatat ,,pe viu" este că profesorilor (uneori) le este frică de greşelile elevilor şi, de aceea, de multe ori lecţia se transformă într-un monolog, în loc să fie un dialog. De ce le este frică? Pentru că ar trebui să dea explicaţii şi (unii dintre ei) şi-ar putea arăta limitele în predare.

Un profesor bun, dacă observă o greşeală de calcul sau de raţionament, care nu este ,,recunoscută” (de exemplu, nu a fost făcută din neatenţie), are la îndemână mai multe mijloace:

- să dea un contraexemplu;
- să sugereze elevului să verifice, dacă este posibil, rezultatul obţinut pe un caz concret sau particular;
- să se folosească şi de ceilalţi elevi pentru corectare.

Dar toate acestea pot fi puse în practică doar dacă profesorul are în ,,colecţia” lui un arsenal de greşeli frecvente (sau chiar mai puţin întâlnite), fiecare (greşeală) cu explicaţia ei.

De aceea, consider că este foarte util (într-un viitor proiect al S.S.M.R.) să punem la dispoziţie profesorilor o bază de date care să conţină cât mai multe greşeli, cu explicaţiile lor.

Am să dau acum câteva exemple, făcând o paralelă cu termenii medicali. Atunci când se constată o greşeală matematică, facută de un elev, ar trebui să se treacă prin cele trei etape: *anamneza*, *diagnosticul* şi *tratamentul*. Vom exemplifica acum pe două cazuri concrete.

Exemplul 1. Se consideră următorul subiect, dat la o testare:

1. *Dacă aria unui pătrat este 9, să se găsească latura sa.*
2. *Să se rezolve ecuaţia* $x^2 = 16$.

La primul punct majoritatea elevilor a dat răspunsul corect $l = 3$, dar la al doilea punct foarte mulţi au scris $x = 4$.

<u>Anamneza</u>

- sunt copii de clasa a VII-a (sau a VI-a);
- ştiu să lucreze cu numere negative;
- nu ştiu formula pentru soluţiile ecuaţiei de gradul al II-lea.

<u>Diagnosticul (ipoteze)</u>

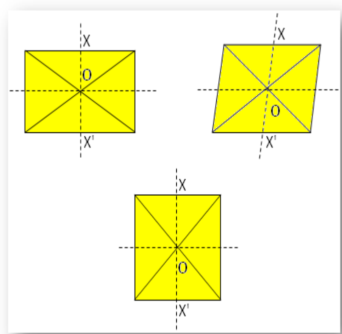
- au fost influenţaţi de contextul geometric al punctului precedent (un pătrat de arie 16 ...);
- acţionează în analogie cu ecuaţia de gradul I;
- îşi pune amprenta rutina calculelor cu numere pozitive (lipsa de experienţă);
- sunt bucuroşi că au găsit (totuşi) ceva;
- nu ştiu câte soluţii ,,ar putea avea” o astfel de ecuaţie.

Tratamentul

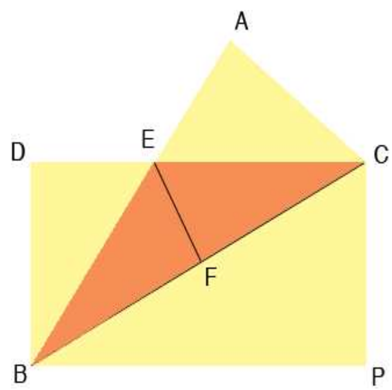
- să folosească, din nou, instrumentul geometric, dar, de data aceasta, în legătură cu cel algebric (avem un pătrat de arie 16 şi de latură x; atunci $x^2 = 16$, care are soluţiile: $x_1 = 4$ şi $x_2 = -4$, dar x trebuie să fie strict pozitiv);
- să li se reamintească ce este o ecuaţie, ce sunt soluţiile ecuaţiei şi ce înseamnă a rezolva ecuaţia;
- să conştientizeze că $\sqrt{x^2} = |x|$;
- în ultimă instanţă, să reformuleze problema sub forma unei ghicitori: ,,Mă gândesc la un număr, pozitiv sau negativ. Îl ridic la pătrat şi obţin 16. La ce număr m-am gândit?”.

Exemplul 2. Acest exemplu se referă la greşeli tipice, care apar la învăţarea transformărilor geometrice, în cazul de faţă, simetriile axiale.

Câte axe de simetrie are un pătrat? Mulţi dintre copii vor răspunde: două (axele verticală şi orizontală). Folosind metoda ,,plierii”, nu va fi greu să realizeze că mai există încă două axe (diagonalele).

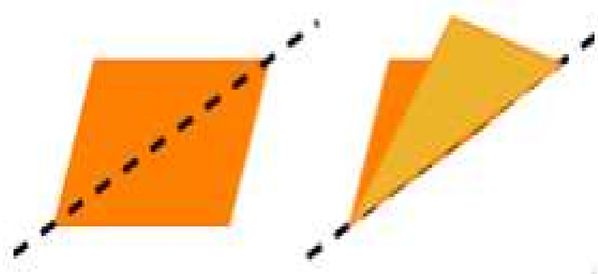


Ar urma, apoi, să îi întrebe pe elevi dacă este la fel şi la dreptunghi. Mulţi vor spune (cred) că este ca la pătrat, adică tot 4. Folosind, din nou, metoda sugerată mai sus va realiza că nu este aşa, diagonalele nu sunt axe de simetrie.



După ce i-a întrebat dacă au înţeles, urmează încercarea finală.

Câte axe de simetrie are un paralelogram oarecare? Paralelogramul, fiind mai aproape de dreptunghi, probabil că ar spune că două, adică cele două drepte ce unesc mijloacele laturilor opuse.



Metoda de mai sus este încă utilă. Ca ,,bonus", elevii ar putea să fie puşi să construiască simetricul unui paralelogram faţă de una dintre laturi. Dacă vor obţine figura corectă, înseamnă că au înţeles.

Dacă e să ne întrebăm de ce au greşit, răspunsul cel mai la îndemână este că, în general, ei sunt obişnuiţi cu axele orizontale sau verticale. Atunci când acestea sunt oblice şi nu intersectează figura, apar problemele.

Bibliografie

[1] J.A. Adam, L. Weinstein, *Guesstimation: Solving the World's Problems on the Back of a Cocktail Napkin*, Princeton University Press, 2008.

[2] S.V. Duzhin, B.D. Chebotarevski, *Transformation Groups for Beginners*, AMS, Student Mathematical Library, 2004.

[3] G. Gamow, *One Two Three ... Infinity: Facts and Speculations of Science*, Viking Press, 1947.

[4] R.B. Nelsen, *Proofs Without Words*, Mathematical Association of America, 2000.

CONF. UNIV. DR. CĂTĂLIN GHERGHE
UNIVERSITATEA DIN BUCUREŞTI

MATEMATICA ŞI CALCULATORUL: EXEMPLE, IDEI ŞI BUNE PRACTICI

de RADU GOLOGAN şi ALEXANDRU NEGRESCU

Mijloacele de calcul (maşini mecanice, electronice, rigla de calcul) au fost, de-a lungul istoriei educaţiei matematice, prezente permanent ca modalităţi de exemplificare, modelare sau rezolvare a unor probleme.

Ultimele decenii au adus aceste tehnologii la o perfecţiune şi o răspândire neaşteptată, revoluţionând în fapt orice aspect al vieţii. Evident, aceste tehnologii au pătruns masiv şi în educaţie, cu precădere în cea ştiinţifică.

De la simple mijloace de calcul numeric, computerele au ajuns să facă raţionamente analogice complexe, revoluţionând, astfel, domenii importante ale cunoaşterii umane. Cine îşi imagina în anii ’60 ai secolului trecut, la apariţia primelor calculatoare electronice de buzunar, că, în câteva decenii, acestea vor putea face operaţii complexe, de la grafice de funcţii la descompuneri în factori pentru polinoame sau la calcule complexe cu coeficienţi Christoffel?

Ca fapt istoric, primele idei de a crea sisteme algebrice computerizate (*computer algebra systems*) au apărut în anii ’60 în grupurile de cercetare ale algebriştilor din Europa şi SUA. Probabil că cel mai cunoscut a fost cel de la Universitatea Waterloo din Canada, care a culminat cu lansarea celebrului soft analogic Maple în 1982. În paralel, s-au dezvoltat Mathematica, Mathlab, iar în ultimii ani variante ,,open acces” ca Maxima, SageMath, Axiom etc.

Toate acestea au şi variante educaţionale, pentru toate nivelurile. În plus, ele au dus la dezvoltarea unor softuri simplificate şi uşor de folosit pe echipamente accesibile oricui. Astfel, compania Wolfram, cea care a dezvoltat pachetul Mathematica, oferă online softul Wolfram Alpha, accesibil inclusiv de pe telefoanele inteligente şi extrem de complet în ceea ce priveşte formalismul matematic.

În sistemul educaţional românesc există încercări de a dezvolta softuri educative pentru matematică de către companii importante ca Softwin. Din păcate, acestea nu au reuşit să se impună în sistemul educaţional, nefiind suficient de atractive şi prietenoase pentru elevi.

Punctul nostru de vedere este că elevul trebuie să întâlnească în sistemul de predare aceeaşi tehnologie cu care este obişnuit din mijloacele informatice pe care le utilizează zi de zi. În orice moment al învăţării matematicii şi la orice vârstă, calculatorul trebuie să fie prezent. De la ecranul ce poate fi folosit împreună cu videoproiectorul, ca tablă, până la calcule, grafice sau experimente.

Vom prezenta, în cele ce urmează, câteva exemple de posibile practici la lecţiile de matematică pentru diferite niveluri de vârstă sau de domenii. Prezentarea se va referi la mijloace informatice necostisitoare, uşor de procurat. Evident că există multe astfel de variante pe care o simplă căutare pe net le poate aduce. Există, de asemenea, o sumedenie de softuri ce pot fi folosite la evaluarea elevilor. Nu ne vom referi la acestea, rămânând la latitudinea profesorului să le utilizeze.

1. Microsoft Office Excel folosit la lecţia de matematică

Programul tabelar cel mai cunoscut este Microsoft Office Excel (sau variantele sale, Open Access etc). Acesta conţine subrutine utile în predarea matematicii la diverse niveluri. Iată câteva:

- generarea pe coloane a şirului de numere naturale, utilizabil, ulterior, în formule;
- generarea formulelor dependente de numere naturale (progresii, şiruri recurente etc);
- reprezentarea grafică discretă.

Exemplul 1. Numere prime. Se generează pe prima coloană numerele naturale în ordine, pornind cu 1, apoi, formula $A1 + 1$ şi trasă până, să zicem, la 200. Apoi se împart pe rând coloanele la 2, 3, 5 etc, păstrând doar numerele care nu dau împărţiri exacte etc.

Exemplul 2. Studiul şirului lui Fibonacci (clasele primare). Pe coloana A: în linia 1 se scrie 1, apoi pe linia 2 se scrie formula $= A1 + 1$, care se trage până la linia 100, de exemplu. Pe coloana B se scriu, pe rând, numerele 1, 1 şi, apoi, în căsuţa de pe linia trei formula $= B1 + B2$, care se trage până la linia 100, generând, astfel, şirul lui Fibonacci. Pentru clasele mai mari, se poate verifica, pe coloana C, ordinul de creştere: de exemplu, pe rând, cu 2^n, 3^n, $(2/3)^n$ şi, în final, cu formula pentru termenul general.

Exemplul 3. Pentru clasele de liceu. Compararea şirului $n!$ cu şirul lui Stirling, $\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$, şi, apoi, cu deducerea aproximativă a constantei $\sqrt{2\pi}$. Se generează, ca mai sus, ambele şiruri care se pot reprezenta grafic pe aceeaşi pagină.

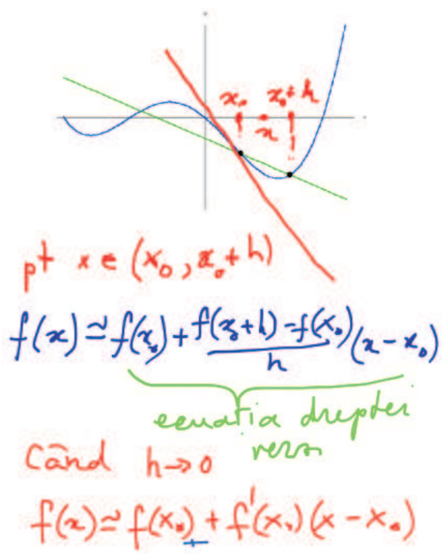
Exemplul 4. Studiul convergenţei unor şiruri sau a ordinului de mărime. De exemplu, şirul definit recurent cu: $a_1 = 1$ şi $a_{n+1} = a_n + \frac{n}{a_n^2}$, şi deducerea faptului că $a_n \approx \sqrt[3]{2n^2}$.

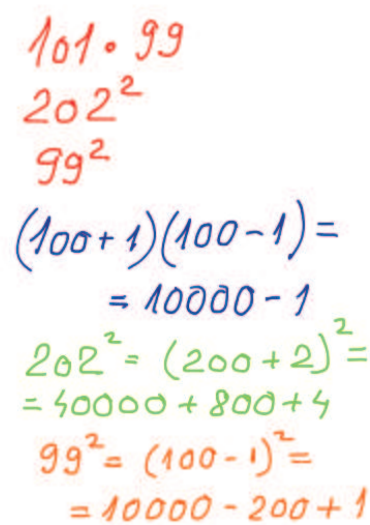
2. Utilizarea softurilor ce permit scrierea pe tabletă sau pe telefon inteligent

Există o gamă bogată de programe gratuite sau extrem de ieftine ce pot fi folosite pe post de tablă inteligentă cu posibilităţi de acces la import online de imagini sau cu înregistrare de sunet (pot înlocui cu succes tabla inteligentă). Marele avantaj al acestora este că cele scrise pot fi salvate şi, apoi, online, fiecare elev are acces la acestea.

Iată câteva astfel de softuri:

- MathPad, transformă scrisul de mână în formule de cod LaTeX;
- GoodNotes, posibilitatea de a scrie lecţii întregi, import din net, editor de text.

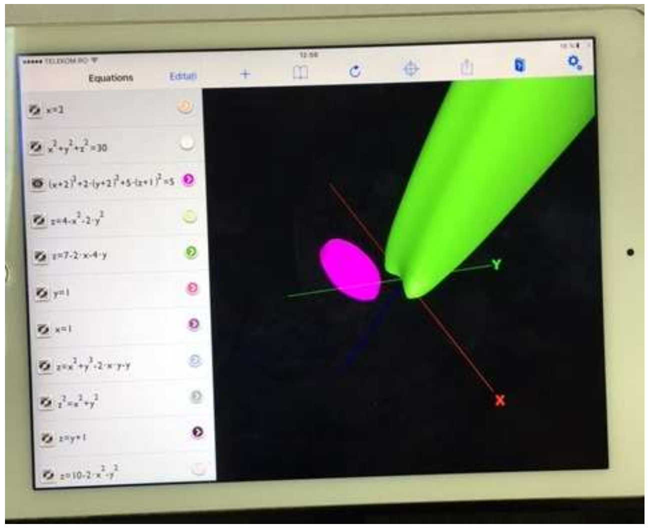


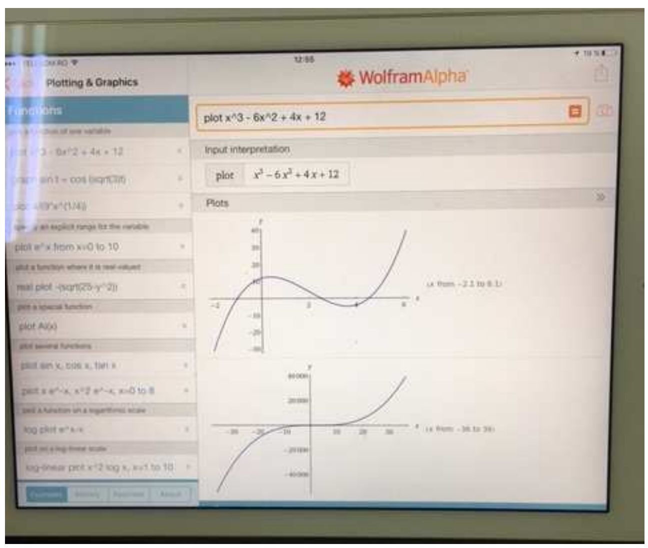


Exemplele de mai sus sunt create cu GoodNotes, iar primul conţine o figură importată şi completată pe parcursul expunerii.

3. Softuri cu posibilităţi grafice

Internetul conţine foarte multe oferte de astfel de softuri, open access. Evident, cele comerciale sunt complete dar, îndeobşte, scumpe şi, adesea, cu pretenţii de programare. Mă voi referi la două: Wolfram Alpha şi Quick Graph, ce pot fi utilizate inclusiv prin importarea în programe de scris. Iată:


Equations
Editați
x=2
z=7-2·x-4·y
y=1
x=1
z=y+1
X
Y


Plotting & Graphics
WolframAlpha
plot x^3 - 6x^2 + 4x + 12
Input interpretation
plot
Plots

4. Anexă: Microsoft Office Excel folosit la studiul limitei unui şir

ŞIR. LIMITA UNUI ŞIR

Noţiunea de *limită* este una dintre ideile fundamentale, nu doar în înţelegerea analizei matematice, ci şi în dezvoltarea gândirii matematice, dincolo de aceasta, şi în urmărirea rigorii matematice ([4]). Limita prezintă dificultăţi majore elevilor, indiferent dacă ea este studiată în contextul şirurilor, funcţiilor sau seriilor ([8]). În plus, multe dintre obstacolele întâlnite de elevi în înţelegerea altor concepte (continuitate, diferenţiabilitate, integrabilitate) pot fi legate de dificultăţile cu limite ([2]).

Aspecte istorice. Trecerea la limită este cunoscută încă din vremea filozofului grec Zenon din Elea, ce o utiliza în paradoxurile sale. Grecii Leucippus, Democritus, Antiphon, Eudoxus şi Archimedes au dezvoltat metoda epuizării (*methodus exaustionibus*), care utiliza trecerea la limită pentru a găsi cu aproximaţie ariile sau volumele unor figuri sau corpuri complicate. În lucrarea *Tractatus de Quadratura Curvarum* (1704), Isaac Newton liniarizează dezvoltarea binomului $(x + o)^n$, trecând la limită ($o \to 0$). Toţi marii matematicieni care au contribuit la dezvoltarea analizei matematice (Leibniz, Euler, D'Alembert, Cauchy, Bolzano etc) au intuit conceptul de limită, dar cel care a oferit o definiţie riguroasă a fost Karl Weierstrass (1860).

Noţiunea matematică de *şir* nu este cu mult diferită de cea din viaţa de zi cu zi. De exemplu, pentru a descrie ce vom face în ziua de mâine, nu este suficient să enumerăm activităţile, ci trebuie să o facem şi în ordinea corectă. În matematică, noţiunea de şir este utilizată pentru a descrie o succesiune infinită de numere, a căror ordine este bine determinată de o regulă.

Putem reprezenta un şir astfel:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_n, ...$$

sau, mai simplu, $(a_n)_{n\geq 1}$.

Numărul a_n se numeşte *al n-lea termen* al şirului (sau *termenul general* al şirului) iar numărul n se numeşte *indicele* lui a_n.

Exemplu. Şirul care are termenul general de forma $2^n, n \in \mathbb{N}^*$, este următorul:

$$\begin{array}{cccccc} a_1, & a_2, & a_3, & a_4, ..., & a_n, ... \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2, & 4, & 8, & 16, ..., & 2^n, ... \end{array}$$

Putem gândi şirul ca o regulă, care asociază numărul 1 cu numărul 2, numărul 2 cu numărul 4, numărul 3 cu numărul 8 şi, în general, numărul n cu numărul 2^n. Astfel, dacă termenul general este $f(n) = 2^n$, şirul poate fi rescris:

$$f(1), f(2), f(3), f(4), ..., f(n), ...,$$

care este ,,lista” valorilor funcţiei $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}, f(n) = 2^n$. Aceasta ne sugerează următoarea definiţie:

Definiţia şirului. *Un* şir *este o funcţie al cărei domeniu de definiţie este mulţimea numerelor naturale (nenule).*

Un şir poate fi dat:

1. prin enumerarea primilor termeni, pentru a putea stabili o legătură între ei şi a deduce următorii:
$$1, 4, 7, 10, 13, ...$$
2. printr-o formulă explicită a termenului general:
$$a_n = 3n - 2, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N}^*;$$
3. printr-o formulă de recurenţă şi precizarea primului(-ilor) termen(-i):
$$a_1 = 1 \text{ şi } a_n = a_{n-1} + 3, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

În exemplele date, oricare dintre cele trei modalităţi descrie acelaşi şir. Funcţia care face asocierea este $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}, f(n) = 3n - 2$.

Exerciţiul 1. Scrieţi primii patru termeni ai şirului $(b_n)_{n\geq 1}$, unde $b_n = \dfrac{2n}{n^2+1}$.

Soluţie. Primii patru termeni ai şirului sunt:

$$b_1 = \frac{2 \cdot \mathbf{1}}{\mathbf{1}^2 + 1} = 1; \qquad b_3 = \frac{2 \cdot \mathbf{3}}{\mathbf{3}^2 + 1} = \frac{3}{5};$$
$$b_2 = \frac{2 \cdot \mathbf{2}}{\mathbf{2}^2 + 1} = \frac{4}{5}; \qquad b_4 = \frac{2 \cdot \mathbf{4}}{\mathbf{4}^2 + 1} = \frac{8}{17}.$$

$\square$

Exerciţiul 2. Scrieţi primii şase termeni ai şirului $(f_n)_{n\geq 1}$, definit recurent:

$$f_1 = f_2 = 1 \text{ şi } f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N}, n \geq 3.$$

Soluţie. În baza relaţiei de recurenţă, particularizată pentru $n = 3$, găsim termenul al treilea al şirului:

$$f_3 = f_2 + f_1 = 1 + 1 = 2.$$

Cunoscând termenii al doilea şi al treilea, determinăm termenul al patrulea: $f_4 = f_3 + f_2 = 2 + 1 = 3$. Analog, găsim: $f_5 = f_4 + f_3 = 3 + 2 = 5$ şi $f_6 = f_5 + f_4 = 5 + 3 = 8$. $\square$

Pauză de Fortificare Intelectuală. Acest şir este cunoscut sub numele de *şirul lui Fibonacci* şi rezolvă problema creşterii unei populaţii de iepuri. Leonardo Pisano Bigollo (1170-1250), cunoscut ca Fibonacci, a fost un matematician italian şi este considerat drept unul dintre cei mai talentaţi matematicieni vestici ai Evului Mediu.

Exerciţiul 3. Găsiţi expresia celui de-al n-lea termen al şirului:

$$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \ldots$$

Soluţie. Alternanţa semnelor $+$ şi $-$ ne aminteşte că $(-1)^n$ are valoarea 1, dacă numărul n este par, şi are valoarea -1, dacă numărul n este impar. Astfel, putem scrie:

$$a_1 = 1 = \frac{(-1)^2}{1}, \;\; a_2 = -\frac{1}{2} = \frac{(-1)^3}{2}, \;\; a_3 = \frac{1}{3} = \frac{(-1)^4}{3}, \;\; \ldots$$

Concluzionăm că forma termenului general este $a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$. $\square$

Şirurile pot avea diverse proprietăţi:

1. şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este ***mărginit inferior*** de m, şi spunem că m este *margine inferioară* pentru şir, dacă $a_n \geq m$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$;

   Exemplu. Şirul cu termenul general $a_n = \dfrac{1}{n+1}$, este mărginit inferior de $m = 0$.

2. şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este ***mărginit superior*** de M, şi spunem că M este *margine superioară* pentru şir, dacă $a_n \leq M$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$;

   Exemplu. Şirul cu termenul general $a_n = \dfrac{2}{n^2}$, este mărginit superior de $M = 2$.

3. şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este *mărginit*, dacă el este mărginit inferior şi superior;

   Exemplu. Şirul cu termenul general $a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ este mărginit, deoarece $-\frac{1}{2} \leq a_n \leq \frac{1}{4}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.
4. şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este *pozitiv*, dacă $a_n > 0$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$;

   Exemplu. Şirul cu termenul general $a_n = \frac{n}{n+1}$ este pozitiv.
5. şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este *negativ*, dacă $a_n < 0$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$;

   Exemplu. Şirul cu termenul general $a_n = \frac{-n^2-1}{n+1}$ este negativ.
6. şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este *crescător*, dacă $a_{n+1} \geq a_n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ (dacă inegalitatea este strictă, şirul se va numi *strict crescător*);

   Exemplu. Şirul cu termenul general $a_n = 1 - \frac{1}{n}$ este strict crescător.
7. şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este *descrescător*, dacă $a_{n+1} \leq a_n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ (dacă inegalitatea este strictă, şirul se va numi *strict descrescător*);

   Exemplu. Şirul cu termenul general $a_n = \frac{n}{n^2+1}$ este strict descrescător.
8. şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este *alternant*, dacă $a_n \cdot a_{n+1} < 0$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, adică oricare doi termeni consecutivi au semnele opuse.

   Exemplu. Şirul cu termenul general $a_n = (-1)^n \cdot n$ este alternant.

După cum am afirmat mai sus, orice şir este o funcţie. Dacă vom considera şirul $(a_n)_{n\geq 1}$, cu termenul general

$$a_n = \frac{n}{n+1},$$

acestuia îi vom asocia funcţia

$$f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}, f(n) = \frac{n}{n+1}.$$

Ne propunem să ilustrăm utilitatea unui program informatic (în cazul nostru, de calcul tabelar) în înţelegerea conceptului de limită a unui şir. Lecţia se va desfăşura în cabinetul de informatică astfel încât la cel puţin doi elevi să existe un calculator cu unul dintre programele tabelare instalat, de preferinţă Microsoft Office Excel.

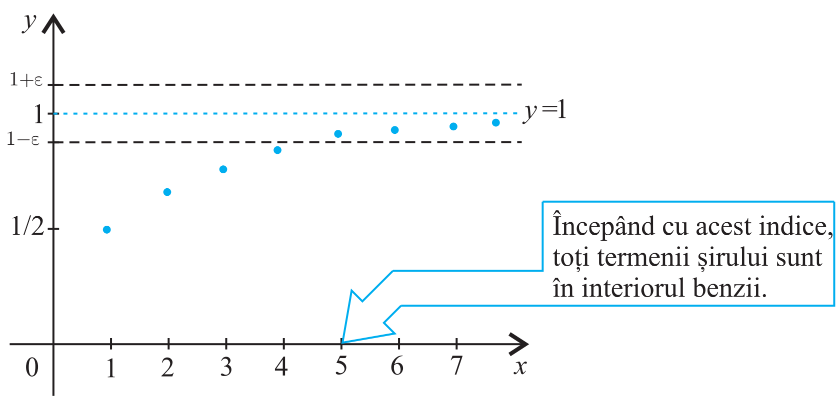
Aşadar, cum folosim un program tabelar pentru a desena graficul unui şir (evident, pentru un număr finit de valori n)?

Pentru aceasta, amintim că, fiind dat şirul $(a_n)_n$, mulţimea punctelor de forma $(n; a_n)$, din planul cartezian al axelor de coordonate, se va numi *graficul şirului*.

Soluţie, folosind Microsoft Office Excel.

- pe coloana A sunt generate n numere naturale (este suficient să generăm 3-4 valori, apoi, selectând valorile respective, pot fi obţinute prin ,,tragere" oricât de multe valori care vor respecta regula folosită pentru generarea primelor valori);
- pe coloana B se aplică definiţia şirului (în celula B1 se foloseşte, pentru n, valoarea din A1, în B2 valoarea din A2; folosind tehnica de la punctul A se pot obţine toate valorile pentru fiecare n din coloana A);
- se folosesc opţiunile de grafic din Excel pentru a pune coloana A pe axa Ox şi B corespunzătoare pe axa Oy (sunt o serie de opţiuni care pot fi folosite: tipul graficului, etichetarea coloanelor, legenda, culoarea graficului etc).

Folosind această tehnică, pentru şirul nostru, se obţine graficul următor:



O imagine vizuală nu numai că ajută elevul să înţeleagă conceptul de limită, însă oferă noii noţiuni mai multă rigoare.

Informal, rolul limitei unui şir (dacă ea există) este să ne arate comportamentul termenului general a_n, atunci când $n \to \infty$. Mai concret, să vedem faţă de ,,cine" se apropie termenii şirului, atunci când indicele devine din ce în ce mai mare.

Observând graficul funcţiei $f(n) = \dfrac{n}{n+1}$, deducem că termenii şirului $(a_n)_{n\geq 1}$ se apropie de 1, când valoarea lui n creşte. Astfel, diferenţa $1 - \dfrac{n}{n+1} = \dfrac{1}{n+1}$ poate fi făcută cât de mică dorim, pentru un număr n suficient de mare.

În apropierea lui 1, pe axa Oy, să reprezentăm punctele $1 - \varepsilon$ şi $1 + \varepsilon$.

Pauză de Fortificare Intelectuală. Cine este ε? În matematică, litera grecească ε (*epsilon*) denotă o cantitate pozitivă, arbitrară şi foarte mică, aşa cum Augustin Louis Cauchy o numea în cursul său: *un nombre très petit*. La origine, ε corespunde primei litere a cuvântului franţuzesc *erreur* (eroare). Într-adevăr, Cauchy desemna, prin ε, erori din teoria probabilităţilor. Matematicianul Paul Erdős utiliza frecvent termenul *epsiloni* pentru a se referi la copii.

Geometric, ce observăm? Că există un termen al şirului (în exemplul nostru grafic, a_5), pentru care el şi toţi termenii care urmează după el se găsesc în interiorul benzii delimitate de dreptele $y = 1 - \varepsilon$ şi $y = 1 + \varepsilon$ (numită banda ε). Iar, în exteriorul acestei benzi *rămân întotdeauna un număr finit de termeni ai şirului*. Vizualizarea ce utilizează banda ε este similară unei priviri microscopice, de tipul *zooming-in*.

Numind *vecinătate* a lui 1 orice bandă ε (sau, mai riguros, orice interval deschis ce îl conţine pe 1), reformulăm constatarea de mai sus: în afara oricărei vecinătăţi a lui 1 se află cel mult un număr finit de termeni ai şirului.

Acum suntem apţi să dăm următoarea definiţie:

Definiţia limitei unui şir (cu vecinătăţi). *Numărul real L este* limita *şirului $(a_n)_{n\geq 1}$ dacă, în afară oricărei vecinătăţi a lui L, se află cel mult un număr finit de termeni ai şirului $(a_n)_{n\geq 1}$.*

Orice şir care are limită se numeşte *şir convergent*. Spunem că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ *este convergent către limita L* şi scriem

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L.$$

Exemplu. Cel mai simplu model de şir convergent este şirul constant $(c, c, c, ...)$, care are termenul general $a_n = c \in \mathbb{R}$. Evident, limita sa este tot numărul c.

Exemplu. Şirul $(a_n)_{n\geq 1}$, cu $a_n = \dfrac{n}{n+1}$, converge către limita 1. Aşadar,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

Un şir care nu converge se numeşte *divergent*.

Exemplu. Şirul alternant $(a_n)_{n\geq 1}$, cu $a_n = (-1)^n$, este divergent. Într-adevăr, considerând orice număr de pe axa reală, există vecinătăţi ale acestuia, în afara cărora se află o infinitate de termeni ai şirului (ori termenii de 1, ori termenii de -1, ori ambii). Un alt exemplu este şirul numerelor naturale.

Dacă termenii şirului $(a_n)_{n\geq 1}$ se apropie de L, rezultă că $|a_n - L|$ devine, când n creşte, din ce în ce mai mică şi poate fi pusă în relaţie cu ε-ul pomenit mai sus. Obţinem următoarea:

Teorema de convergenţă ($\varepsilon - N$). *Numărul real L este limita şirului $(a_n)_{n\geq 1}$, dacă şi numai dacă, pentru orice $\varepsilon > 0$, există $N \in \mathbb{N}^*$, astfel încât, pentru orice $n \geq N$, avem*

$$|a_n - L| < \varepsilon.$$

Ce însuşire are fiecare ,,personaj" al acestei inegalităţi? L este valoarea propusă a limitei, deci este o *constantă*. a_n reprezintă un termen oarecare al şirului, care se apropie de L, când n creşte, deci este natural să îl considerăm *variabil*. În cele din urmă, ε este un ,,dispozitiv" pentru a măsura apropierea termenilor şirului de L şi va avea caracter de *parametru*.

Cuantificatorii logici, prezenţi în teoremă, sunt şi ei pentru mulţi dintre elevi impedimente în calea înţelegerii conceptului de limită ([3]).

Exerciţiul 4. Arătaţi, folosind teorema de convergenţă $\varepsilon - N$, că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Soluţie. Considerăm şirul $(a_n)_{n\geq 1}$, cu $a_n = \dfrac{n+1}{2n}$. Pe baza rezultatului de mai sus, ar trebui să arătăm: pentru orice ε, există $N \in \mathbb{N}^*$, astfel încât pentru orice $n \geq N$, avem

$$\left|\frac{n+1}{2n} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon.$$

Ultima inegalitate este echivalentă cu $\left|\dfrac{1}{2n}\right| < \varepsilon$, adică $n > \dfrac{1}{2\varepsilon}$, ce ne inspiră să alegem $N = \left[\dfrac{1}{2\varepsilon}\right] + 1 \in \mathbb{N}^*$ (unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a; amintim că $[a] \leq a < [a] + 1$).

Aşadar, pentru orice $\varepsilon > 0$, există $N = \left[\dfrac{1}{2\varepsilon}\right] + 1$, astfel încât, pentru orice $n \geq N$, este adevărată relaţia $\left|\dfrac{n+1}{2n} - \dfrac{1}{2}\right| < \varepsilon$. Deci $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{2n} = \dfrac{1}{2}$. Ideea demonstraţiei a fost: cunoscându-l pe ε, să aflăm rangul N, dependent de ε, ceea ce implică existenţa lui. $\square$

Pentru o şi mai bună ,,împrietenire" cu limitele, propunem spre rezolvare exerciţiile de mai jos.

Exerciţiul 5. Scrieţi primii cinci termeni ai şirului $(b_n)_{n\geq 1}$, unde:

a) $b_n = -\dfrac{n^2+1}{n^2}$;

b) $b_n = \dfrac{3n!}{(n-1)!}$;

c) $b_n = \dfrac{4n-3}{2^n}$

d) $b_n = \dfrac{1+2+...+n}{n+2} - \dfrac{n}{2}$;

e) $b_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2}$;

f) $b_n = \dfrac{n\cos(n\pi)}{2n-1}$.

Exerciţiul 6. Găsiţi expresia termenului general al fiecăruia dintre şirurile:

a) $2, 6, 10, 14, ...$;

b) $-1, 3, 7, 11, ...$;

c) $\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{4}, \dfrac{3}{5}, \dfrac{4}{6}, ...$;

d) $3, -1, \dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{9}, \dfrac{1}{27}, ...$;

e) $2, \dfrac{3}{3}, \dfrac{4}{5}, \dfrac{5}{7}, \dfrac{6}{9}, ...$

Exerciţiul 7 (Biologie). Să studiem o specie de bacterie care, la fiecare jumătate de oră, se divide pentru a forma două noi bacterii. Pornind cu o singură bacterie, la sfârşitul primei jumătăţi de oră vom avea două bacterii, la sfârşitul primei ore vom avea patru bacterii, şi aşa mai departe. Dacă acestui proces îi asociem şirul $(a_n)_{n\geq 1}$, unde a_n reprezintă numărul de bacterii existente după ce au trecut $30 \cdot n$ minute:

a) găsiţi expresia termenului general al şirului;

b) câte bacterii vom avea după 10 ore? Dar după 20 de ore?

Exerciţiul 8 (Dobânda compusă). Considerăm şirul $(A_n)_{n\geq 1}$, cu termenul general

$$A_n = P(1+r)^n,$$

unde P este valoarea sumei iniţiale depuse la începutul primului an, A_n este valoarea dobânzii compuse după n ani şi r este dobânda anuală. Scrieţi primii cinci termeni ai şirului, pentru $P = 2000$ lei şi $r = 0,05$.

Exerciţiul 9 (Dublarea sumei depuse). O bancă plăteşte 7% dobândă pe an. Considerând dobânda calculată lunar, dupa cât timp o sumă depusă se dublează?

Soluţie. Dobânda pe lună este $\dfrac{7\%}{12}$, iar dacă suma iniţială este a, atunci după o lună suma din bancă va fi $a + \dfrac{7a}{1200} = a\left(1+\dfrac{7}{1200}\right)$.

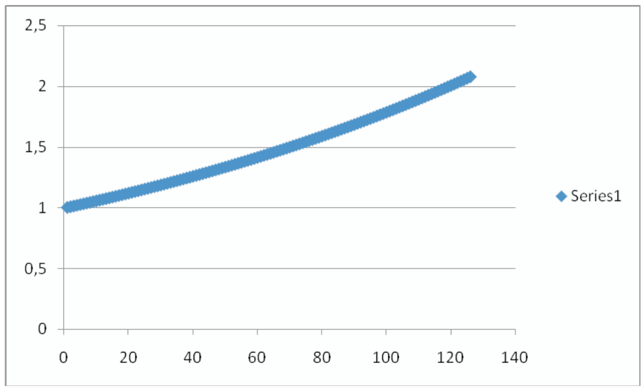
După încă o lună vom avea

$$a\left(1+\frac{7}{1200}\right) + \frac{7}{1200}a\left(1+\frac{7}{1200}\right) = a\left(1+\frac{7}{1200}\right)^2.$$

Folosind acelaşi raţionament găsim că, după n luni, suma depozitată în bancă va fi $a\left(1+\frac{7}{1200}\right)^n$.

Pentru a avea o sumă dublă, adică $2a$, deducem că va trebui să găsim n, numărul de luni, astfel ca $\left(1+\frac{7}{1200}\right)^n \geq 2$.

Reprezentăm graficul şirului $(a_n)_{n\geq 1}$, cu $a_n = \left(1+\frac{7}{1200}\right)^n$.

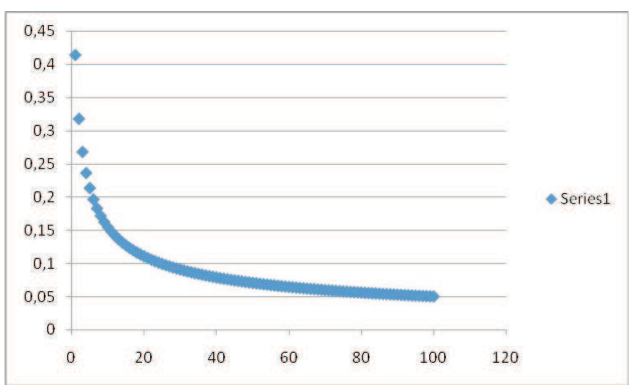


Din grafic se poate observa că $n = 120$ ($a_n = 2,009$).

Exerciţiul 10. Folosind teorema de convergenţă $\varepsilon - N$, arătaţi că:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{2n^2} = 0$; c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n}{n+1} = 3$.

Exerciţiul 11. Folosiţi teorema de convergenţă $\varepsilon - N$ pentru a demonstra că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$, definit prin $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, converge la zero.



Exercițiul 12 (Fizică). O minge este aruncată spre podea de la înălţimea de 16 m. La fiecare contact cu podeaua, ea ricoşează şi se ridică la o înălţime egală cu $\frac{3}{4}$ din înălţimea săriturii precedente. Dacă acestui experiment îi asociem şirul $(a_n)_{n\geq 1}$, unde a_n reprezintă înălţimea la care mingea s-a ridicat imediat după al n-lea contact cu podeaua:

a) aflaţi primii cinci termeni ai şirului;

b) intuiţi limita acestui şir şi justificaţi-o, folosind teorema de convergenţă $\varepsilon - N$.

Exercițiul 13 (Numărul de aur). Numărul $\varphi = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})\approx 1,618034$ este numit de greci *numărul de aur*. Aceştia susţineau că un dreptunghi care are dimensiunile în acest raport este ,,perfect". Matematicianul francez Abraham de Moivre (1667-1754) a demonstrat că termenul general al şirului lui Fibonacci (vezi exerciţiul 2) se poate scrie sub forma:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\varphi^n - \frac{(-1)^n}{\varphi^n}\right]. \tag{1}$$

a) Arătaţi că $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$.

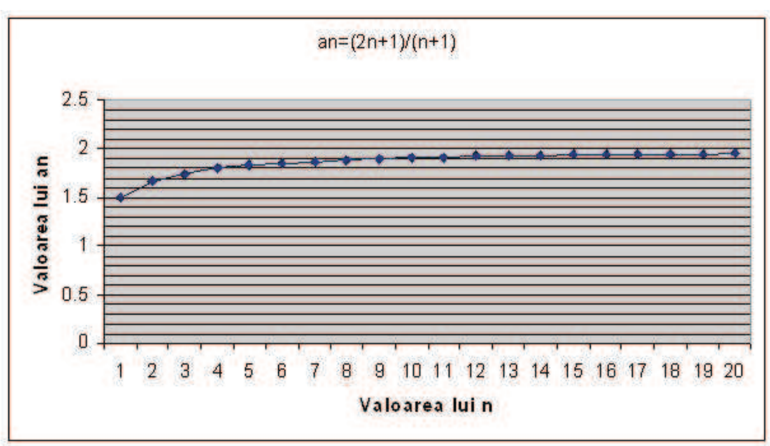
b) Verificaţi relaţia (1) pentru $n = 1$ şi $n = 2$.

c) Demonstraţi prin inducţie că relaţia (1) este adevărată, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercițiul 14. a) Desenaţi în caiet primele 10 puncte ale graficului şirului $(a_n)_{n\geq 1}$, definit prin $a_n = \frac{2n+1}{n+1}$.

b) Aceeaşi cerinţă pentru şirul $(a_n)_{n\geq 1}$, definit prin $a_n = \sqrt{n}$.

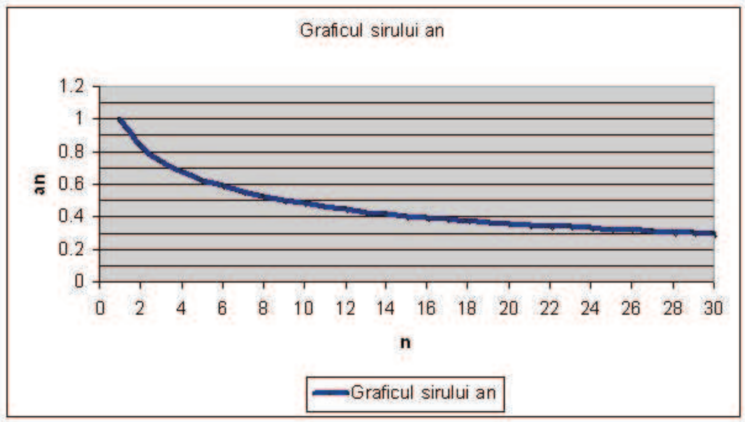
Soluţie. Pentru şirul de la punctul a):



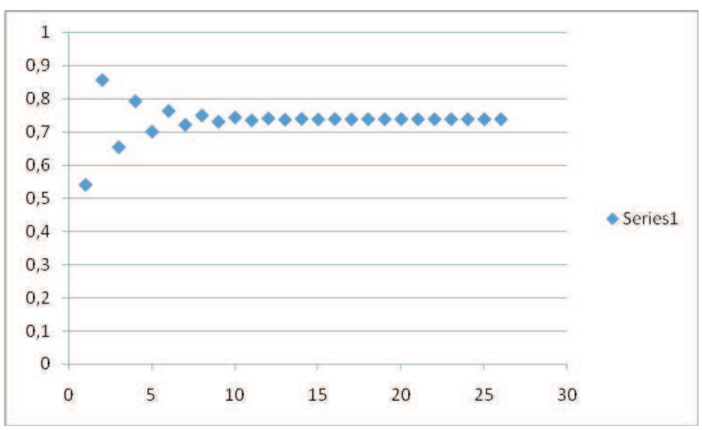
Folosind graficul, se poate trage concluzia că acesta are limita 2.

Exerciţiul 15. Indicaţi legătura dintre graficele de mai sus şi cele ale unor funcţii definite pe axa numerelor reale pozitive.

Exerciţiul 16. Studiaţi monotonia şirului definit prin formula recurentă $a_n = \sin a_{n-1}, n \geq 2$, cu $a_1 = 1$. (În lecţiile viitoare, cu teorema de convergenţă a şirurilor monotone şi mărginite, se poate arăta că acesta converge la 0.)



Exerciţiul 17. Observaţi că şirul definit prin $a_n = \cos a_{n-1}, n \geq 2$, cu $a_1 = 1$, nu este monoton, dar este convergent.



Observaţie. Graficele acestor şiruri sugerează şi valoarea aproximativă (uneori exactă) a limitei.

Bibliografie

[1] Anton, H., Bivens, I., Davis, S. (2009). *Calculus. Early transcedentals* (9th ed.), John Wiley and Sons, New Jersey.

[2] Bezuidenhout, J. (2001). *Limits and continuity: Some conceptions of first-year students*, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 32, 487–500.

[3] Dubinsky, E. et al. (1988). *The student's construction of quantification*, For the Learning of Mathematics - An International Journal of Mathematics Education, 8, 44-51.

[4] Ferrini-Mundy, J., Lauten, D. (1993). *Teaching and learning calculus*, In P. S. Wilson (Ed.), Research ideas for the classroom: High school mathematics, New York: Macmillan, 155–176.

[5] Larson, R. (2009). *Calculus. An Applied Approach* (8th ed.), Brooks/ Cole, Belmont.

[6] Navarro, M., Carreras, P. (2006). *Constructing a concept image of convergence of sequences in the van Hiele framework*, Research in Collegiate Mathematics Education, VI, 61–98.

[7] Nicolescu, M., Dinculeanu, N., Marcus, S. (1971). *Analiză matematică* (vol. I), Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti.

[8] Williams, S. (1991). *Models of limit held by college calculus students*, Journal for Research in Mathematics Education, 22, 219-236.

[9] Colecţia *Didactica Matematică*.

[10] `http://www.fgcu.edu/support/office2007/excel/index.asp`

[11] `http://www.e-learn.ro/tutoriale/ms-excel/19.htm`

[12] `http://www.wolfram.com/cdf-player/`

[13] `http://demonstrations.wolfram.com/`

Prof. univ. dr. Radu Gologan şi Asist. univ. dr. Alexandru Negrescu
Universitatea Politehnica din Bucureşti

MATEMATICA EXPLICĂ FENOMENE DIN COTIDIAN!

prezentare de ALEXANDRU NEGRESCU

Întrebarea „De ce învaţă copiii matematica?” este cea mai grea întrebare pe care o poţi adresa unui profesor de matematică. Posibile răspunsuri:

- de dragul acesteia, pentru că este frumoasă şi uimitoare;
- pentru că matematica te pregăteşte pentru nivelul următor de învăţământ şi pentru o viitoare carieră în ştiinţă, tehnologie, inginerie şi matematică;
- pentru că matematica te învaţă ce este şi să apreciezi diversitatea în gândirea umană şi realizările istorice din întreaga lume;
- pentru a vedea rolul matematicii în viaţa de zi cu zi;
- pentru că matematica te ajută să înţelegi, să analizezi, să critici şi să iei măsuri vizavi de aspectele sociale şi politice din lume, în special vizavi de problemele de nedreptate.

Există, desigur, şi alte răspunsuri. De ce este această întrebare grea? Pentru că nu ştim cât de motivante sunt răspunsurile pentru copii! Însă, cu toate acestea, profesorii trebuie să facă tot ce le stă în putinţă să îi determine pe copii să iubească matematica. Principalele ingrediente sunt: respectul faţă de elevi, stăpânirea disciplinei şi responsabilitatea actului de predare. Dacă aceste trei condiţii sunt îndeplinite, profesorul se poate alia cu: aplicaţiile matematicii în viaţa de zi cu zi, istoria matematicii, utilizarea calculatorului în învăţarea conceptelor matematice etc. Nu trebuie însă abuzat de aceşti aliaţi.

În materialul de faţă ne vom opri la rolul matematicii în viaţa de zi cu zi. Elevii trebuie să vadă cum intervine matematica în cotidian, făcând conexiuni între conceptele matematice şi reprezentările acestora din viaţa de zi cu zi.

Prezentăm câteva aplicaţii ale matematicii în cotidian ce pot fi abordate la clasă ca probleme, ajutând copiii să înţeleagă mai bine noile concepte.

Aritmetică şi algebră

Codurile de bare

Să considerăm un cod de bare de 13 cifre. De exemplu,

$$9 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 7 \quad 3 \quad 4 \quad 7 \quad 1 \quad 3 \quad 6 \quad 5 \quad 3.$$

Ultima cifră, în cazul nostru 3, se numeşte *cifra de verificare*. O înlăturăm din secvenţă şi rămânem cu:

$$9 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 7 \quad 3 \quad 4 \quad 7 \quad 1 \quad 3 \quad 6 \quad 5.$$

Dacă adunăm triplul sumei cifrelor de pe poziţiile pare,

$$S_1 = 7 + 9 + 3 + 7 + 3 + 5 = 34,$$

cu suma cifrelor de pe poziţiile impare,

$$S_2 = 9 + 8 + 7 + 4 + 1 + 6 = 35,$$

obţinem rezultatul

$$3 \cdot 34 + 35 = 137,$$

iar diferenţa până la următorul multiplu de 10 este

$$140 - 137 = 3,$$

adică însăşi cifra de verificare.

Regula generală pe care am ilustrat-o este: *Diferenţa de la numărul* $3S_1 + S_2$ *până la următorul multiplu de 10 este egală cu cifra de verificare*.

X XXXXXX XXXXXX

i) Verificaţi dacă următoarele coduri de bare au fost trecute în mod corect în baza de date.

a) Agrafe: 327-019-26969-9-4;
b) Multivitamine: 590-620-40094-0-2;
c) Rezerve stilou: 401-270-03011-7-8;
d) Ceai: 460-524-60052-2-1.

ii) Care sunt cifrele de verificare a următoarelor coduri de bare?

a) 978-606-93227-2-?;
b) 360-923-09798-4-?;
c) 978-973-50-2948-?;
d) 401-270-03291-3-?.

Lungimea pasului

Figura de mai jos prezintă urmele paşilor făcuţi de un bărbat. Lungimea unui pas (în metri), pe care o notăm cu P, este distanţa dintre urmele lăsate de călcâie pentru doi paşi diferiţi.

Se ştie că pentru bărbaţi are loc, cu aproximaţie, relaţia

$$\frac{n}{P} = 140,$$

unde n este numărul de paşi pe minut şi P este lungimea unui pas, exprimată în metri.

Dacă pasul lui Cristian măsoară $0,75$ m, calculaţi viteza de mers a lui Cristian, în kilometri pe oră.

Rezolvare. Conform relaţiei de mai sus, numărul de paşi făcuţi de Cristian într-un minut este egal cu

$$n = 140 \cdot P = 140 \cdot 0,75 = 105.$$

Deoarece Cristian face 105 paşi într-un minut şi un pas măsoară $0,75$ m, atunci el face într-un minut $105 \cdot 0,75 = 78,75$ m.

Aşadar, viteza lui Cristian este de $78,75$ m pe minut, adică $4,725$ km pe oră.

Numărul de aur şi estetica feţei

Folosind matematica, estetica (sau simetria) unei feţe poate fi măsurată. Grecii considerau că frumuseţea este reprezentată de anumite proporţii egale cu numărul de aur.

Acest număr, notat prin φ (în 1909, la propunerea matematicianului american **Mark Barr**, după prima literă a numelui sculptorului grec **Fidias**), este a doua mare comoară a matematicii (în viziunea matematicianului german **Johannes Kepler**, după Teorema lui Pitagora) şi este menţionat de Euclid în *Elementele* sale, în propoziţia 30 din cartea a VI-a: *Să se împartă un segment în medie şi extremă raţie* (n.a., în numărul de aur), *în care întregul este atât de mare faţă de partea mai mare pe cât este partea mai mare faţă de partea mai mică.*

A fost numit *proporţia divină* la începutul secolului al XVI-lea de către **Leonardo Da Vinci** şi are numeroase aplicaţii în ştiinţele naturii, medicină, inginerie etc. Prin calcul, găsim că $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, cu aproximaţie $1,618$.

Determinaţi, prin măsurare, următoarele valori:
$a =$ distanţa de la vârful capului la bărbie (de la 1 la 2);
$b =$ distanţa de la vârful capului la ochi (de la 1 la 3);
$c =$ distanţa de la ochi la nas (de la 3 la 4);
$d =$ distanţa de la ochi la buze (de la 3 la 5);
$e =$ lăţimea nasului (de la 6 la 7);
$f =$ distanţa exterioară dintre ochi (de la 8 la 9);
$g =$ lăţimea capului (de la 10 la 11);
$h =$ distanţa de la baza părului la ochi (de la 12 la 3);
$i =$ distanţa de la nas la bărbie (de la 4 la 2);
$j =$ distanţa de la buze la bărbie (de la 5 la 2);
$k =$ lungimea buzelor (de la 13 la 14);
$l =$ distanţa de la nas la buze (de la 4 la 5).

Calculaţi valorile următoarelor rapoarte: $\frac{a}{g}$, $\frac{b}{d}$, $\frac{i}{j}$, $\frac{i}{c}$, $\frac{e}{l}$, $\frac{f}{h}$, $\frac{k}{e}$, şi studiaţi-le apropierea de numărul de aur.

Tibia bărbaţilor caucazieni

Pentru a estima înălţimea h a unui bărbat caucazian, pornind de la lungimea t a tibiei sale, medicii legişti utilizează ecuaţia $h = 2,42 \cdot t + 81,93$, conform

[William Bass, *Human Osteology: A Laboratory and Field Manual*, Missouri Archaeological Society, 1995]. Presupunând că ecuaţia are o marjă de eroare de ± 3 cm şi lungimea tibiei este de 43,5 cm, aflaţi în ce interval variază înălţimea bărbatului.

Soluţie. Conform ecuaţiei utilizate de medici, dacă lungimea tibiei este egală cu $43,5$ cm, atunci înălţimea bărbatului poate fi estimată cu valoarea $h = 2,42 \cdot 43,5 + 81,93 = 187,2$ cm. Ţinând seama de marja de eroare, deducem că înălţimea reală a bărbatului, H, verifică inecuaţia $|H - 187,2| \leq 3$, adică $184,2 \leq H \leq 190,2$. Intervalul căutat este $[184,2; 190,2]$.

Populaţia de delfini

O populaţie de delfini creşte cu $4,6\%$ pe an. În câţi ani populaţia se va dubla?

Rezolvare. Dacă populaţia iniţială este egală cu P_0, atunci peste un an ea va fi egală cu

$$P_1 = P_0 + 4,6\% P_0 = P_0 + \frac{4,6}{100} P_0 = P_0 + 0,046 P_0 = 1,046 P_0.$$

Peste doi ani ea va fi

$$P_2 = P_1 + 4,6\% P_1 = 1,046 P_1 = 1,046^2 P_0$$

şi aşa mai departe. Peste n ani ea va fi

$$P_n = 1,046^n P_0.$$

Ca, peste n ani, populaţia să fie cel puţin egală cu dublul celei iniţiale trebuie ca $P_n \geq 2P_0$, adică $1,046^n P_0 \geq 2P_0$, de unde $1,046^n \geq 2$. Aceasta implică

$$n \geq \log_{1,046} 2 = \frac{\ln 2}{\ln 1,046}.$$

Folosindu-ne de un tabel logaritmic sau de un computer, găsim $\ln 2 \simeq 0,693$ şi $\ln 1,046 \simeq 0,044$. Aşadar,

$$n \geq \frac{0,693}{0,044} = 15,41,$$

deci peste 16 ani vom avea siguranţa că populaţia s-a dublat.

Sherlock Holmes în acţiune

Legea lui Newton de răcire afirmă că temperatura T de răcire a unei substanţe la momentul t (ore) poate fi modelată prin ecuaţia

$$T = (T_0 - T_R)e^{-rt} + T_R,$$

unde T_0 este temperatura iniţială a substanţei, T_R este temperatura camerei iar r este o constantă, ce reprezintă viteza de răcire a substanţei.

Celebrul detectiv **Sherlock Holmes** are de anchetat o crimă şi, pentru aceasta, merge la faţa locului împreună cu bunul său prieten, doctorul John Watson. Totul a rămas nemişcat, special pentru ei. Temperatura persoanei recent decedate a fost măsurată şi s-a constatat că era egală cu $78,8^o$F la ora 12:30 şi cu $75,2^o$F la ora 13:30. În cameră, temperatura a rămas constantă, 68^oF. Dacă temperatura corpului în momentul decesului a fost de $98,6^o$F, ajutaţi-l pe Sherlock Holmes să afle la ce oră a murit persoana în cauză. (În legătură cu problema S:L14.100 din Suplimentul cu exerciţii al Gazetei Matematice nr. 3/2014.)

Remarcă. Subiectul ales este foarte important în Criminalistică, la tema Investigării scenei unei crime. (Se poate consulta: *Crime Scene Investigation*, ConnectEd, 2010.)

Rezolvare. În cazul nostru, $T_0 = 98,6^o$F, $T_R = 68^o$F. Viteza de răcire a corpului omenesc nu se dă, însă o vom afla singuri. Aşadar, legea lui Newton devine:

$$T = (98,6 - 68)e^{-rt} + 68,$$

adică

$$T = 30,6e^{-rt} + 68.$$

La ora 12:30, ecuaţia se poate scrie

$$78,8 = 30,6e^{-rt} + 68,$$

de unde găsim

$$e^{-rt} = 0,35,$$

iar la ora 13:30, ecuaţia se poate scrie

$$75,2 = 30,6e^{-r(t+1)} + 68,$$

de unde obţinem

$$e^{-r(t+1)} = 0,23.$$

Din raportul ultimelor două rezultate obţinute, deducem că

$$\frac{e^{-rt}}{e^{-r(t+1)}} = \frac{0,35}{0,23},$$

adică $e^r = 1,52$ şi viteza de răcire a corpului omenesc este

$$r = \ln 1,52 = 0,41.$$

Revenind la prima ecuaţie găsită, $e^{-rt} = 0,35$, scriem

$$\left(e^{-r}\right)^t = 0,35,$$

de unde

$$t = \log_{e^{-r}} 0,35 = \frac{\ln 0,35}{\ln e^{-0,41}} = \frac{\ln 0,35}{-0,41 \ln e} = -\frac{\ln 0,35}{0,41}$$

şi găsim valoarea $t \simeq 2,5$.

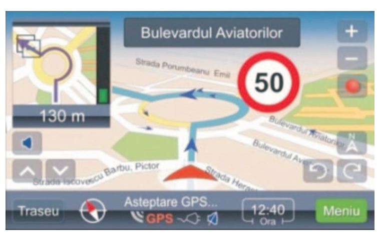
Aşadar, până la ora 12:30 trecuseră două ore şi jumătate de la momentul crimei şi concluzionăm că respectiva crimă a avut loc în jurul orei 10:00.

GPS-ul şi algebra liniară

GPS-ul este un sistem de poziţionare prin satelit. Cei mai mulţi dintre noi i-au constatat utilitatea atunci când, deşi au mers pe drumuri pe care nu le cunoşteau, au ajuns cu bine la destinaţie. Aşa cum vom vedea în cele ce urmează, sistemul are la bază noţiuni şi rezultate din algebra liniară.

Sistemul de poziţionare globală (în engleză, *Global Positioning System*) este un sistem global de navigaţie prin satelit şi unde radio. A devenit foarte popular după ce a început să fie folosit de, din ce în ce mai mulţi, conducători auto. De câţiva ani a fost înglobat şi pe unele telefoane mobile, precum şi pe tablete. Principiul de funcţionare a GPS-ului constă în folosirea câtorva sateliţi din spaţiu ca puncte de referinţă pentru localizarea la sol. Sistemul NAVSTAR, principalul sistem militar de poziţionare prin satelit, de tip GPS, dispunea în 2010 de 24 de sateliţi, care se află la o înălţime de aproximativ 20180 km faţă de suprafaţa Pământului.

Prin măsurarea exactă a distanţelor dintre receptor şi, cel puţin, patru sateliţi se poate determina poziţia oricărui punct de la suprafaţa Pământului. Pentru a calcula distanţa dintre satelit şi receptor se cronometrează timpul de care are nevoie semnalul radio să ajungă de la satelit la receptor. Ştim că semnalul radio se deplasează cu 300000 km/s (viteza luminii). Fiecare satelit are semnal propriu (Pseudo Random Code), astfel încât receptorul ştie exact despre ce satelit este vorba.



Cu timpul, GPS-ul a început să folosească mai mult de 4 sateliţi şi metoda celor mai mici pătrate pentru a determina cea mai bună estimare a locaţiei şi orei receptorului. Alte îmbunătăţiri ale metodei GPS-ului actual iau în considerare impedimentele pe care undele radio le întâmpină la trecerea prin atmosferă.

Algebra liniară oferă, în multe aplicaţii, posibilitatea construirii de modele matematice elegante şi accesibile; o vom utiliza în cele ce urmează pentru a prezenta un model matematic al GPS-ului. Mai concret, vom schiţa maniera în care poziţia geografică a receptorului este determinată de GPS, utilizând soluţia generală parametrizată a unui sistem compatibil, nedeterminat, de ecuaţii liniare.

Modelul. Considerăm un autoturism al cărui şofer deţine un GPS. Acesta obţine, simultan, semnale de la patru sateliţi, fiecare semnal specificând momentul transmisiei şi poziţia satelitului în acel moment.

Să ne imaginăm un sistem de coordonate $Oxyz$ cu originea în centrul Pământului. Considerând raza Pământului ca unitate de lungime, Pământul va corespunde sferei unitate (este vorba, desigur, de o reprezentare idealizată). Pentru a lucra cu valori numerice uşor de manevrat, vom considera ca unitate de timp milisecunda, iar ca unitate de viteză, raza Pământului/milisecundă. Cu aceste convenţii, valoarea numerică a vitezei semnalului radio este de 0,047.

Poziţia maşinii poate fi exprimată prin punctul de coordonate (x, y, z), care, apoi, pot fi transformate în coordonatele geografice uzuale: latitudine şi longitudine. Evident, $x^2+y^2+z^2 = 1$. Fie t momentul în care primim semnalele. Scopul nostru este să determinăm valorile x, y, z, t.

De exemplu, considerăm următorul sistem de date:

Satelitul	Poziţia	Momentul emisiei semnalului
1	(1;2;1)	25,96
2	(2;1;2)	19,14
3	(1;1;1)	43,49
4	(2;1;1)	25,16

De exemplu, semnalul de la primul satelit a fost transmis la momentul 25,96 şi a sosit la momentul t. Călătorind cu viteza $0,047$, el a parcurs distanţa

$$d = 0,047(t - 25,96).$$

Aceeaşi distanţă poate fi exprimată şi în funcţie de x, y, z şi de poziţia satelitului de coordonate (1;2;1), astfel: $d = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2}$. Combinând aceste două rezultate, obţinem ecuaţia

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 0,047^2(t - 25,96)^2, \tag{1}$$

care se rescrie

$$2x + 4y + 2z - 0,114t = 5,512 - 0,047^2t^2.$$

În aceeaşi manieră, scriem ecuaţiile pentru ceilalţi trei sateliţi. Acestea vor forma un sistem de 4 ecuaţii cu 4 necunoscute, ce va putea fi rezolvat în x, y, z, t:

$$\begin{cases} 2x + 4y + 2z - 0,114t = 5,512 - 0,047^2t^2 \\ 4x + 2y + 4z - 0,084t = 9,191 - 0,047^2t^2 \\ 2x + 2y + 2z - 0,192t = -0,178 - 0,047^2t^2 \\ 4x + 2y + 2z - 0,111t = 5,601 - 0,047^2t^2 \end{cases}.$$

Vom exprima necunoscutele x, y şi z în funcţie de t. Prin scăderea primei ecuaţii din celelalte trei, obţinem sistemul

$$\begin{cases} 2x - 2y + 2z = 3,679 - 0,03t \\ 0x - 2y + 0z = -5,69 + 0,078t \\ 2x - 2y + 0z = 0,089 - 0,003t \end{cases}.$$

Acesta are matricea extinsă:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 & 3,679 - 0,03t \\ 0 & -2 & 0 & -5,69 + 0,078t \\ 2 & -2 & 0 & 0,089 - 0,003t \end{pmatrix},$$

care se reduce, prin eşalonare (metoda Gauss-Jordan), la

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2,8895 - 0,0405t \\ 0 & 1 & 0 & 2,845 - 0,039t \\ 0 & 0 & 1 & 1,795 - 0,0135t \end{pmatrix}.$$

Aşadar, am obţinut soluţia generală:

$$\begin{cases} x = 2,8895 - 0,0405t \\ y = 2,845 - 0,039t \\ z = 1,795 - 0,0135t \end{cases}.$$

Înlocuind aceste valori în ecuaţia (1), obţinem

$$(1,8895 - 0,0405t)^2 + (0,845 - 0,039t)^2 + \\ + (0,795 - 0,0135t)^2 = 0,047^2(t - 25,96)^2,$$

care se reduce la

$$0,0011t^2 - 0,125t + 3,428 = 0,$$

ecuaţie ce are soluţiile: $t_1 = 67,398$ şi $t_2 = 46,238$. Valoarea t_2 ne plasează în afara Pământului iar valoarea t_1 ne dă: $x = 0,159$, $y = 0,216$ şi $z = 0,885$.

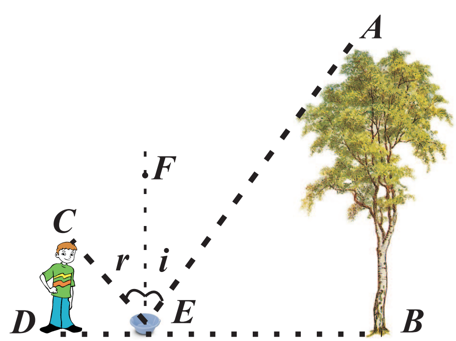
Am considerat pentru exemplul nostru valori pentru care calculele sunt uşor de urmărit. Pentru circulaţia într-un oraş aglomerat, probabil că precizia mulţumitoare ar fi de 7 zecimale exacte.

Cu ajutorul acestor coordonate, autoturismul nostru este poziţionat de dispozitivul GPS pe hartă şi îi este apoi oferită cea mai avantajoasă rută până la destinaţie (conform unor criterii pentru care cele mai multe aparate GPS oferă şi opţiuni: drumul cel mai scurt sau cel mai rapid, consumul minim de carburant etc). Pentru ca acest pas să se desfăşoare în bune condiţii este, desigur, recomandabil ca receptorul GPS al autoturismului să aibă instalate hărţi exacte şi la zi ale regiunii în care are loc deplasarea.

Geometrie

Cum putem măsura înălţimea unui copac?

Idee. Aşezăm un vas cu apă la oarece distanţă de copac şi ne poziţionăm pe dreapta care uneşte baza trunchiului copacului cu vasul, aşa încât să putem vedea în apă reflexia vârfului copacului.



Conform celei de a doua legi a reflexiei, unghiul de incidenţă ($\sphericalangle i$) va fi congruent cu unghiul de reflexie ($\sphericalangle r$). Atunci, cu notaţiile din figura de mai sus, vom avea că $\sphericalangle AEF \equiv \sphericalangle CEF$, de unde $\sphericalangle AEB \equiv \sphericalangle CED$. Triunghiurile ΔABE şi ΔCDE, fiind dreptunghice, vor fi asemenea, şi rezultă că $\dfrac{AB}{CD} = \dfrac{BE}{DE}$, de unde înălţimea copacului este $AB = \dfrac{CD \cdot BE}{DE}$. Evident, lungimile CD (a observatorului), BE şi DE se pot determina cu uşurinţă.

Aplicaţie practică. Dacă observatorul are $1,65$ m şi aşezăm vasul la 3 m de el şi 25 m de copac, atunci copacul va avea înălţimea de $\dfrac{1,65 \cdot 25}{3} = 13,75$ m.

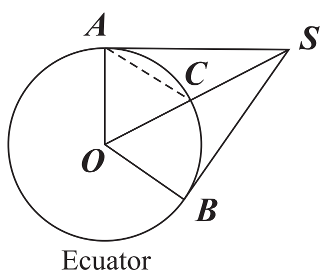
Satelitul

Satelitul S este situat pe orbita Pământului. În figura de mai jos este prezentat planul ecuator al Pământului. Unghiul format de cele două tangente din punctul S

la suprafaţa Pământului are măsura egală cu 60^o. Raza ecuatorială a Pământului este aproximativ egală cu 6378 km.

a) Care este lungimea tangentelor din punctul S la suprafaţa Pământului?

b) Care este distanţa de la satelit la Pământ?

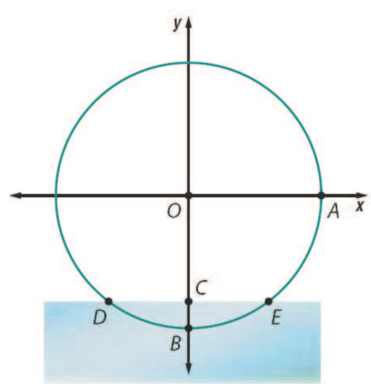


Soluţie. a) Deoarece triunghiurile dreptunghice SAO şi SBO sunt congruente (I. C.), triunghiul SAO are $m(\sphericalangle ASO) = 30^o$ şi $OA = 6378$, deci tg$ASO = \dfrac{OA}{SA}$, de unde $SB = SA = OA\sqrt{3} = 11047$ km.

b) Distanţa căutată este lungimea segmentului $[SC]$. Deoarece $m(\sphericalangle ASO) = 30^o$, deducem că $m(\sphericalangle AOS) = 60^o$, deci triunghiul AOC este echilateral. Aşadar, $OA = OC = CA$ şi $m(\sphericalangle SAC) = 90^o - 60^o = 30^o$. Deci, triunghiul SAC este isoscel cu $CS = CA = CO = 6378$ km.

Roata hidraulică

Roţile hidraulice (sau roţile de apă) sunt nişte mecanisme ce utilizează energia râurilor. Acestea sunt folosite pentru a iriga culturi, pentru a măcina, pentru a turna fier în topitorii etc. Roata hidraulică din figura de mai jos este folosită de-a lungul unui râu din provincia chineză Guangxi.



În figura din dreapta este prezentată schema unei roţi hidraulice, poziţionată cu centrul în originea unui sistem de axe de coordonate. Ea are diametrul de 20 m şi intră în apă cu 2 m sub nivelul acesteia. Când mecanismul se roteşte este nevoie de 12 secunde ca punctul A de pe circumferinţă să revină în poziţia iniţială.

a) Care sunt coordonatele punctelor A, B, C, D, E?

b) Care este distanţa de la punctul A la suprafaţa apei?

c) Dacă mecanismul se roteşte în sens invers acelor de ceasornic ce unghi determină punctul A până ajunge în punctul D?

d) Suprafaţa apei determină coarda $\overline{DE}$. Care este lungimea acesteia?

e) Care este măsura unghiului înscris $\sphericalangle DAE$?

Soluţie a) Raza roţii este egală cu $20 : 2 = 10$ m. Aşadar, $OA = 10$ şi $A(10; 0)$. Apoi, $B(0; -15)$. Cum $OC = 10 - 2 = 8$, atunci $C(0; -8)$. Evident, ordonatele punctelor D şi E sunt egale cu -8. Să considerăm punctele $D(d; -8)$ şi $E(e, ; -8)$, unde $d < 0 < e$. Triunghiurile ODC şi OEC, fiind dreptunghice, satisfac relaţiile: $OD^2 = CO^2 + CD^2$ şi $OE^2 = CO^2 + CE^2$, adică $d^2 + (-8)^2 = 10^2$ şi $e^2 + (-8)^2 = 10^2$. Aceste două ecuaţii ne conduc la $d = -6$ şi $e = 6$, deci, $D(-6; -8)$ şi $E(6, ; -8)$.

b) Deoarece $OA \parallel DE$, $d(A, DE) = d(O, DE) = OC = 8$ m.

c) Trebuie să aflăm măsura unghiului „mare” $\sphericalangle AOD$. Observăm că aceasta este egală cu $270^o - m(\sphericalangle DOC)$. Din triunghiul dreptunghic DOC, $\sin DOC = \frac{6}{10} = 0,6$, şi folosindu-ne de un tabel trigonometric, găsim că $m(\sphericalangle DOC) \simeq 37^o$. Aşadar, măsura dorită este egală cu $270^o - 37^o = 233^o$.

d) Punctele D şi E fiind simetrice faţă de punctul C, găsim că $DE = 2DC = 12$ m.

e) Măsura unghiului DAE este egală cu jumătatea măsurii arcului $\widehat{DE}$, adică $m(\sphericalangle DAE) = \frac{1}{2}m(\widehat{DE}) = \frac{1}{2}m(\sphericalangle DOE) = m(\sphericalangle DOC) = 37^o$.

Analiză matematică

O problemă de economie

Într-un stat se intenţionează modificarea legii privind impozitul pe venit. O propunere este ca impozitul ce se reţine din suma impozabilă de x euro să se calculeze prin funcţia:

$$I(x) = \begin{cases} 0,18x, & \text{dacă } 0 \leq x < 10000 \\ 1200 + 0,22x, & \text{dacă } 10000 \leq x \end{cases}.$$

a) Calculaţi $\lim_{x \searrow 0} I(x)$. Care este interpretarea practică a rezultatului?

b) Calculaţi $\lim_{x \nearrow 10000} I(x)$ şi $\lim_{x \searrow 10000} I(x)$. Ce semnificaţie practică are rezultatul şi care este calea de urmat?

Soluţie. a) Obţinem că $\lim_{x \searrow 0} I(x) = \lim_{x \searrow 0} 0,18x = 0$; acesta este un aspect pozitiv: înseamnă că nu pot apărea anomalii de tipul unei sume care să trebuiască plătită ca impozit chiar şi de către persoanele cu venituri mai mici decât respectiva sumă.

b) Deoarece

$$\lim_{x \nearrow 10000} I(x) = \lim_{x \nearrow 10000} 0,18x = 1800 \text{ euro}$$

iar

$$\lim_{x \searrow 10000} I(x) = \lim_{x \searrow 10000} (1200 + 0,22x) = 3400 \text{ euro},$$

deducem că funcţia noastră este discontinuă în 10000 ($x_0 = 10000$ este punct de discontinuitate de prima speţă). Problema practică ce intervine constă în faptul că saltul de la impozitul pentru un salariu imediat sub 10000 euro la impozitul pentru un salariu imediat peste 10000 euro este foarte mare, de aproximativ 1600 euro. Va trebui probabil avută în vedere revizuirea formulei aşa încât să evite salturile mari între impozitele veniturilor apropiate. O idee de luat în calcul ar fi ajustarea celei de-a doua ramuri a funcţiei propuse la $-400 + 0,22x$, pentru care funcţia devine continuă şi, prin urmare, mai apropiată de dezideratul formulat.

Presiunea sângelui din aortă

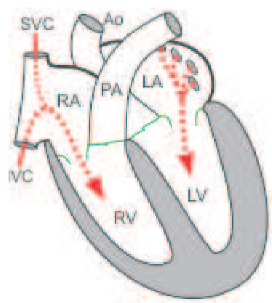
Presiunea, P, a sângelui din aortă în timpul fazei diastolice poate fi modelată de ecuaţia diferenţială

$$P'(t) + \frac{C}{W} P(t) = 0,$$

unde C şi W sunt constante pozitive iar t este numărul de secunde contorizate de la începutul fazei diastolice. Condiţia iniţială este $P(0) = P_0$, cu P_0 presiune cunoscută.

a) Verificaţi că funcţia $P(t) = P_0 e^{-\frac{Ct}{W}}$ este soluţie a ecuaţiei diferenţiale de mai sus.

b) Pentru soluţia prezentată la punctul a), calculaţi $\ln \dfrac{P_0}{P(2)}$.



Rezolvare. a) Pentru început, calculăm derivata $P'(t) = -\dfrac{C}{W} P_0 e^{-\frac{Ct}{W}}$ şi atunci

$$P'(t) + \frac{C}{W} P(t) = -\frac{C}{W} P_0 e^{-\frac{Ct}{W}} + \frac{C}{W} P_0 e^{-\frac{Ct}{W}} = 0.$$

b) Deoarece $P(2) = P_0 e^{-\frac{2C}{W}}$, deducem că

$$\frac{P_0}{P(2)} = \frac{P_0}{P_0 e^{-\frac{2C}{W}}} = \frac{1}{e^{-\frac{2C}{W}}} = e^{\frac{2C}{W}}.$$

Atunci

$$\ln \frac{P_0}{P(2)} = \ln e^{\frac{2C}{W}} = \frac{2C}{W}.$$

Bibliografie

[1] Dan Kalman, *An Underdetermined Linear System for GPS*, The College Mathematical Journal, no. 5, 2002, pp. 384-390.

[2] *Learning Mathematics for Life. A View Perspective for PISA*, OECD, 2009.

[3] Jerrold Marsden, Alan Weinstein, *Calculus I*, Springer, 1985.

[4] Colecţia *Didactica Matematică*.

[5] `http://ro.wikipedia.org/wiki/Global_Positioning_System`

[6] `http://facethis.blogspot.ro`

[7] `http://www.nctm.org`

Asist. univ. dr. Alexandru Negrescu
Universitatea Politehnica din Bucureşti

Matematicieni celebri (cu o mică cronologie)
de Doru Ştefănescu

Istoria Matematicii în Şcoală

Prezentarea la clasă a unor episoade din istoria matematicii permite o mai bună înţelegere a cunoştinţelor predate şi situarea teoriilor şi rezultatelor aride în context cultural şi social.

Am alcătuit câteva medalioane ale unor matematicieni care au avut contribuţii remarcabile la dezvoltarea ştiinţei noastre. Urmăm o ordine cronologică care doreşte schiţarea principalelor etape ale dezvoltării matematicii.

Expunerea ideilor din spatele acestei cronologii şi a biografiilor matematice ajută la umanizarea lecţiei de matematică. Elevii vor privi matematica altfel, vor respira uşuraţi între o mică teoremă şi un exerciţiu. Iar exemplul unor oameni celebri îi va conduce la găsirea unor modele pe care să le urmeze. În acest fel, lecţia de matematică va contribui şi la formarea personalităţii fiecăruia.

Despre opera şi viaţa matematicienilor ale căror medalioane le schiţăm aici, recomandăm cărţile lui Florian Cajori [3], Carl Boyer [2] şi Moritz Cantor [4]. Cartea lui Boyer este accesibilă publicului larg, conţinând, nu doar analiza istorică a evoluţiei ideilor matematice, ci multe amănunte biografice şi chiar mici istorioare. Lucrarea lui Cajori este, poate, cea mai compactă istorie a matematicii, reuşind să sintetizeze evoluţia acesteia din Antichitate şi până când a fost scrisă, pe la 1920. În sfârşit, cartea lui Moritz Cantor este o operă monumentală şi nu a fost egalată de vreo altă scriere, de acest gen, până acum. Se opreşte, însă, la momentul 1800.

Antichitatea

- Thales
- Pitagora
- Euclid
- Diofant
- Apollonius
- Arhimede

Evul Mediu

- Al Kharizmi
- Omar Khayyam
- Fibonacci

Renaşterea

- Cardano
- Leonardo
- Galilei
- Tartaglia
- Kepler

Începuturile Lumii Moderne

- Fermat
- Descartes
- Viète
- Barrow
- Leibniz
- Newton
- familia Bernoulli
- Euler
- Lagrange

Fundamentele Matematicii Moderne

- Galois
- Cauchy
- Gauß
- Bolyài
- Cantor
- Weierstraß

Matematica Nouă

- Kronecker
- Hilbert
- van der Waerden
- Klein
- Minkowski
- Poincaré
- Cartan
- Grupul Bourbaki
- Grothendieck

Primii Matematicieni Români

- Pompeiu
- Ţiţeica
- Lalescu

Thales (cca. 624–546 Î. Hr.)

Thales din Milet este considerat primul gânditor grec care a folosit metode ştiinţifice pentru a explica Universul şi pentru a înţelege fenomenele naturale. A fost inginer, matematician, astronom şi filosof. Este unul dintre cei şapte înţelepţi ai Greciei Antice:

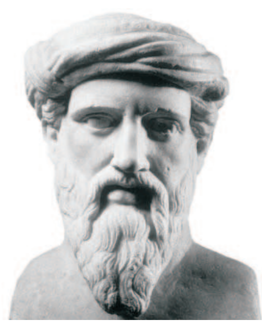
1. Cleobulus din Lindos,
2. Solon din Atena,

3. Chilon din Sparta,
4. Bias din Priene,
5. Thales din Milet,
6. Pittacus din Mytilene,
7. Periander din Corint.

În tinereţe, Thales a fost în Egipt, unde s-a iniţiat în geometrie. Întors în Grecia, a iniţiat un studiu sistematic al geometriei pe baze logice. Este, probabil, primul care a dat demonstraţii geometrice riguroase. Dintre teoremele pe care le-a descoperit menţionăm următoarele:

- Un cerc este împărţit în două părţi egale de orice diametru.
- Unghiurile de la baza unui triunghi isoscel sunt egale.
- Unghiurile dintre două drepte secante sunt egale.
- Două triunghiuri care au două unghiuri egale şi o latură egală sunt congruente.
- Un unghi înscris într–un semicerc este drept.

Pitagora (cca. 570–495 Î. Hr.)



Pitagora este unul dintre primii matematicieni importanţi, cunoscuţi, din istoria ştiinţei. A avut contribuţii remarcabile în matematică, teoria muzicii, filosofie, religie. A condus un grup care se ocupa de ştiinţă şi religie, grup închis care nu făcea publice descoperirile membrilor săi.

În matematică este cunoscut, mai ales, prin teorema care îi poartă numele şi prin descoperirea numerelor iraţionale.

Teorema lui Pitagora

Suma pătratelor catetelor unui triunghi dreptunghic este egală cu pătratul ipotenuzei.

Numere pitagoreice

Numerele întregi x, y, z se numesc *pitagoreice* dacă verifică egalitatea din teorema lui Pitagora, adică

$$x^2 + y^2 = z^2 \,.$$

Astfel de triplete de numere sunt $(3, 4, 5)$ şi $(5, 12, 13)$. Exemple de triplete pitagoreice au fost cunoscute chiar înaintea lui Pitagora, de exemplu, în construcţiile megalitice din Europa Centrală sau Anglia. Aceste construcţii (de exemplu, Stonehenge) datează de peste 4500 de ani.

Numere iraţionale

Pitagora (sau unul dintre membrii grupului său) a arătat că numărul $\sqrt{2}$ nu poate fi reprezentat ca o fracţie a două numere întregi. Un astfel de număr este numit *iraţional*.

Această descoperire a fost păstrată secretă de către *pitagoreici* deoarece existenţa numerelor iraţionale contrazicea concepţiile religioase ale gânditorilor din Grecia Antică.

Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646–1716)

Gottfried Leibniz a fost o personalitate enciclopedică, ce a deschis căi noi în filosofie, matematică, fizică, geologie, fiind în acelaşi timp specialist în ştiinţele juridice şi un activ factor politic.

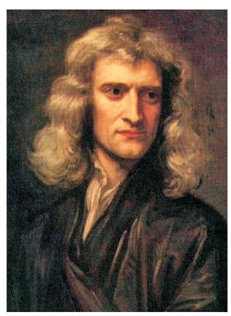
În acelaşi timp cu Newton, a inventat calculul diferenţial şi integral. A introdus notaţiile folosite astăzi pentru derivată şi integrală, mai precis a notat derivata unei funcţii prin $\frac{\mathrm{d}(f(x))}{\mathrm{d}\,x}$ iar integrala prin $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Dar contribuţiile sale în matematică cuprind şi alte domenii.

- A inventat, în acelaşi timp cu Newton, calculul diferenţial şi integral.
- A conceput o maşină mecanică de calcul.
- A scris lucrări de mecanică.
- A considerat logaritmi ale numerelor negative.
- Cercetări de logică.
- A propus folosirea sistemului de numeraţie binar, utilizat astăzi la construcţia calculatoarelor.
- A inventat o metodă de factorizare a polinoamelor.

Leibniz a fost preocupat de rezolvarea completă a problemelor studiate, propunând mai multe procedee algoritmice. Contextul istoric în care Leibniz a creat algoritmi este amănunţit descris în istoria algoritmilor coordonată de Jean–Luc Chabert [5].

Isaac Newton (1643–1727)



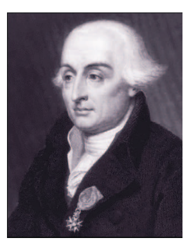
Isaac Newton este unul dintre titanii care au schimbat cursul ştiinţei. Cunoscut, mai ales, pentru cercetările şi tratatele sale de Mecanică şi Analiză Matematică, a fost un savant cu preocupări enciclopedice, de la Matematică la Filosofie, de la Fizică la Teologie, de la Astronomie la Alchimie.

În matematică, Newton a inventat teorii şi metode noi, care au marcat dezvoltarea unor domenii, multe dintre rezultatele şi ideile sale fiind şi astăzi în centrul cercetărilor avansate. Iată câteva dintre contribuţiile sale:

- A inventat, în acelaşi timp cu Leibniz, calculul diferenţial şi integral (*Methodus Fluxionum*).
- A dat o modelare matematică a mecanicii în *Principia Mathematica*.
- A scris un tratat de algebră, numit *Arithmetica Universalis*, care conţine numeroase procedee eficiente legate de studierea polinoamelor şi combinatorică.
- A descoperit formula binomului.
- A inventat metode eficiente de rezolvare a ecuaţiilor neliniare. Cea mai cunoscută este *metoda tangentei*, numită şi metoda Newton–Raphson. (Raphson a fost un elev şi colaborator al lui Newton.)
- A descris o metodă de rezolvare a ecuaţiilor algebrice în două variabile, inventând *poligonul lui Newton* şi seriile formale cu exponenţi fracţionari.
- A inventat calculul cu diferenţe finite şi l-a aplicat la interpolarea funcţiilor.

Procedeele lui Newton au permis inventarea unor algoritmi eficienţi. Despre aceştia putem afla mai multe în cartea lui Jean–Luc Chabert [5]. Newton a fost pionierul inventării unor metode despre care, mai târziu, s-a crezut că au apărut în secolul al XIX-lea. De exemplu, seriile Puiseux sau factorizarea polinoamelor. Până recent, prima factorizare a polinoamelor era atribuită lui Kronecker. În realitate, primul algoritm de descompunere a polinoamelor în produs de puteri de polinoame ireductibile a fost descris de Newton în *Arithmetica Universalis* (1671). O descriere a contribuţiei lui Newton la factorizarea polinoamelor se găseşte în articolul [6], al lui M. Mignotte şi D. Ştefănescu.

Joseph Louis Lagrange (1736–1813)



Joseph Louis Lagrange a contribuit la progresul multor domenii ale matematicii în Epoca Luminilor şi în timpul Revoluţiei Franceze. Este considerat, alături de Euler, o figură dominantă a matematicii Secolului Luminilor (al XVII-lea).

A avut un rol important la Academia de Ştiinţe din Berlin, pe care a condus-o după ce Euler s-a întors la St. Petersburg. După Revoluţia Franceză a fost implicat în organizarea învăţământului superior de elită din Franţa.

Principalele sale realizări matematice:

- Calculul variaţiilor.
- Mecanică. Principiul minimei acţiuni.
- Bazele teoriei substituţiilor, fundamente pentru teoria grupurilor.
- Rezolvarea numerică a ecuaţiilor algebrice.
- Probleme de maxim şi de minim.
- Calculul probabilităţilor.
- Ecuaţii diferenţiale.
- Teoria determinanţilor.

Lagrange a inventat numeroase procedee algoritmice. Contextul lor istoric este discutat în cărţile lui Cajori [3], Boyer [2], Cantor [4] şi Chabert [5].

Traian Lalescu (1882–1929)

Traian Lalescu este unul dintre primii matematicieni români care s-au făcut cunoscuţi pe plan internaţional prin cercetări matematice de vârf. Cunoscut, mai ales, prin faptul că a fost unul dintre pionierii ecuaţiilor integrale, a avut contribuţii remarcabile şi în alte domenii. A fost un colaborator strălucit al *Gazetei Matematice*. A fost profund legat de învăţământul românesc secundar şi superior, prin manuale, cărţi şi organizarea *Şcolii Politehnice din Timişoara*.

Principalele sale realizări matematice:

- Articole de teoria ecuaţiilor integrale. Autorul uneia dintre primele monografii de ecuaţii integrale.

- Primele articole de algebă ale unui autor român. Lucrări despre teoria lui Galois.
- Cercetări de analiză matematică.
- Serii trigonometrice.
- Cartea *Geometria tringhiului*, apărută întâi în limba franceză şi care este retipărită şi astăzi de edituri internaţionale.

Mai multe despre Traian Lalescu se găsesc în documentata istorie a matematicii de la noi, publicată în anii ’60 de George Ştefan Andonie [1].

Bibliografie

[1] George Şt. Andonie, *Istoria Matematicii în România*, 3 vol., Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, 1966–1967.

[2] Carl B. Boyer, *Storia della matematica*, Mondadori, 1980.

[3] Florian Cajori, *History of Mathematics*, 5th edition, AMS Chelsea, 1991.

[4] Moritz Cantor, *Geschichte der Mathematik*, 4 Bde, Tebner, 1906–1908.

[5] Jean-Luc Chabert (editor), *A History of Algorithms*, Springer, 1999.

[6] Maurice Mignotte, Doru Ştefănescu, *La premiére méthode de factorisation des polynômes*, Revue d’Histoire des Mathématiques, vol. 7, 67–89, 2001.

[7] B. L. van der Waerden, *A History of Algebra*, Springer, 1985.

PROF. UNIV. DR. DORU ŞTEFĂNESCU
UNIVERSITATEA DIN BUCUREŞTI