Doua metode de obtinere a unor inegalitati

Adrian Sandovici

Scopul acestei lucrari este acela de a prezenta doua metode unitare de demonstrare a unor inegalitati cunoscute sau de obtinere a unora noi. De fiecare data punctul de plecare îl constituie o problema din Gazeta Matematica.

Rezultatele principale:

Propozitia 1 Fie $n ? N$, $n ? 2$, si $x_1, x_2, ..., x_n ? 0$ astfel încât $\overset{n}{\underset{k?1}{?}} \frac{x_k^2}{x_k^2 ? 1} ? 1$. Atunci au loc urmatoarele doua inegalitati:

(1) $\overset{n}{\underset{k?1}{?}} x_k ? 2$

(2) $\overset{n}{\underset{k?1}{?}} \frac{1}{x_k} ? 2n ? 2$

Teorema 2 Fie $f, g : I ? R$ doua functii reale definite pe intervalul I si fie $x_1, x_2, ..., x_n$, n puncte distincte ale intervalului I.

a) Daca f si g sunt monotone de aceeasi monotonie atunci

(3) $\overset{n}{\underset{i?1}{?}} f ?x_i ?g ?x_i ?? \frac{1}{2}\overset{n}{\underset{i?1}{?}} f ?x_i ?g ?x_{i?1} ?? \frac{1}{2}\overset{n}{\underset{i?1}{?}} f ?x_{i?1} ?g ?x_i ?,$

unde $x_{n?1} ? x_1$.

b) Daca f si g sunt monotone de monotonii diferite atunci

(4) $\overset{n}{\underset{i?1}{?}} f ?x_i ?g ?x_i ?? \frac{1}{2}\overset{n}{\underset{i?1}{?}} f ?x_i ?g ?x_{i?1} ?? \frac{1}{2}\overset{n}{\underset{i?1}{?}} f ?x_{i?1} ?g ?x_i ?,$

unde $x_{n?1} ? x_1$.

Aplicatii directe

Problema 1 Fie $n ? N$, $n ? 2$, si $?_k ? ?0, \frac{?}{2}?$, $k ? 1, ..., n$. Sa se arate ca daca $\overset{n}{\underset{k?1}{?}} \sin^2 ?_k ? 1$ atunci $\overset{n}{\underset{k?1}{?}} tg?_k ? 2$ si $\overset{n}{\underset{k?1}{?}} ctg?_k ? 2n ? 2$.

Problema 2 Pentru orice functie crescatoare $f : ?0, ?? ?? R$ are loc urmatoarea inegalitate $\overset{n}{\underset{i?1}{?}} f ?x_i ??\ln x_i^2 ? \ln x_{i?1} ?? \overset{n}{\underset{i?1}{?}} f ?x_{i?1} ?\ln x_i$, pentru orice numere pozitive $x_1, x_2, ..., x_n$ si $x_{n?1} ? x_1$.