GENERALIZARI ALE UNOR ECUATII FUNCTIONALE

de Maria Nastaselu

Colegiul National „STEFAN CEL MARE" Tg. Neamt

Problema 1 **Sa se determine functiile continue nenule $f:(1,2)\to\mathbb{R}$, astfel încât, pentru orice $x,y\in(1;2)$ sa avem:** $f\left(\dfrac{3xy-4x-4y+6}{2xy-3x-3y+5}\right)=f(x)+f(y)$. **(1)**

(Problema 25330, G.M.nr.12/2005)

Generalizare

Fie $a,b\in\mathbb{R}, a<b$. Sa se determine functiile continue nenule $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, astfel încât, pentru orice $x,y\in(a;b)$ sa avem:

$$f\left(\frac{(a+b)xy-2ab(x+y)+ab(a+b)}{2xy-(a+b)(x+y)+a^2+b^2}\right)=f(x)+f(y) \quad \textbf{(2)}$$

Solutie

Prima întrebare pe care ne-o punem este urmatoarea: Este functia f bine definita? Acest lucru revine la a arata ca pentru orice $x,y\in(a,b)$, avem:

$$\frac{(a+b)xy-2ab(x+y)+ab(a+b)}{2xy-(a+b)(x+y)+a^2+b^2}\in(a,b) \quad \textbf{(3)}$$

Metoda prin care aratam acest lucru ne conduce la rezolvarea problemei daca folosim o metoda adecvata (a se vedea [1])

***Lema*: Fie $a,b\in\mathbb{R}$ cu $a<b$ si $\lambda>0$. Atunci $x=\lambda a+(1-\lambda)b\in(a,b)\Leftrightarrow\lambda\in(0;1)$.**

Într-adevar, $\lambda a+(1-\lambda)b\in(a,b)\Leftrightarrow a<\lambda a+(1-\lambda)b<b\Leftrightarrow 0<a(\lambda-1)+(1-\lambda)b<$ $<b-a\Leftrightarrow 0<(1-\lambda)(b-a)<b-a\Leftrightarrow 0<1-\lambda<1\Leftrightarrow\lambda\in(0,1)$.

În cazul nostru vom scrie $x\circ y=\dfrac{(a+b)xy-2ab(x+y)+ab(a+b)}{2xy-(a+b)(x+y)+a^2+b^2}$ în forma

$\lambda a+(1-\lambda)b\Rightarrow\lambda=\dfrac{b-x\circ y}{b-a}$. Pentru ca "$\circ$" sa fie lege de compozitie (sa satisfaca conditia (3) trebuie sa aratam ca $x\circ y\in(a,b), \forall x,y\in(a,b)$. Din lema de mai sus avem $x\circ y\in(a,b)\Leftrightarrow\lambda\in(0,1)$. **Cum orice numar din intervalul $(0,1)$ este de forma $\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}$ cu $\alpha,\beta>0$, vom încerca sa-l scriem pe λ în aceasta forma.** Putem scrie succesiv: $\lambda=\dfrac{1}{b-a}\left(b-\dfrac{(a+b)xy-2ab(x+y)+ab(a+b)}{2xy-(a+b)(x+y)+a^2+b^2}\right)=$

$$=\frac{1}{b-a}\left(\frac{(b-a)xy+(ab-b^2)(x+y)+b^3-ab^2}{2xy-(a+b)(x+y)+a^2+b^2}\right)=\frac{xy-b(x+y)+b^2}{2xy-(a+b)(x+y)+a^2+b^2}=$$

$$=\frac{(b-x)(b-y)}{\left(xy-b(x+y)+b^2\right)+\left(xy-a(x+y)+a^2\right)}=\frac{(b-x)(b-y)}{(b-x)(b-y)+(x-a)(y-a)}\in(0,1).$$

Pe de alta parte , $\varphi = \dfrac{1}{1+\frac{x-a}{b-x}\cdot\frac{y-a}{b-y}}$, de unde obtinem :

$$x\circ y = \varphi(a-b)+b = \frac{a-b}{1+\frac{x-a}{b-x}\cdot\frac{y-a}{b-y}}+b \qquad \textbf{(4)}$$

Daca consideram functia $g:(a,b)\to(0,\infty),\ g(x)=\dfrac{x-a}{b-x}$, atunci se observa ca g este bijectiva si $g^{-1}(y)=\dfrac{a+by}{1+y},\ \forall y>0$. Relatia **(4)** se scrie $x\circ y=\dfrac{a+bg(x)g(y)}{1+g(x)g(y)}=$

$$= g^{-1}(g(x)g(y)),\ \forall x,y\in(a,b) \Leftrightarrow x\circ y = g^{-1}(g(x)g(y)),\ \forall x,y\in(a,b) \qquad \textbf{(5)}$$

Din relatia **(5)** deducem ca relatia **(2)** se scrie:

$$f\left(g^{-1}(g(x)\cdot g(y))\right)=f(x)+f(y),\ \forall x,y\in(a,b) \Leftrightarrow$$

$$f\left(g^{-1}(xy)\right)=f\left(g^{-1}(x)\right)+f\left(g^{-1}(y)\right),\ \forall x,y\in(0,\infty) \Leftrightarrow$$

$$f\left(g^{-1}\left(e^{x+y}\right)\right)=f\left(g^{-1}\left(e^{x}\right)\right)+f\left(g^{-1}\left(e^{y}\right)\right),\ \forall x,y\in\mathbb{R} \qquad \textbf{(6)}$$

Ecuatia **(6)** fiind ecuatie de tip Cauchy deducem ca exista $\alpha\in\mathbb{R}$ astfel încât sa avem:

$$f\left(g^{-1}\left(e^{x}\right)\right)=\alpha x,\ \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow f\left(g^{-1}(x)\right)=\alpha\ln x,\ \forall x\in(0,\infty) \Leftrightarrow$$

$$f(x)=\alpha\ln g(x),\ \forall x\in(a,b) \Leftrightarrow f(x)=\alpha\ln\frac{x-a}{b-x},\ \forall x\in(a,b)$$

Observatie Pentru $a=1, b=2$ obtinem solutia ecuatiei (1)

$$f(x)=\alpha\ln\frac{x-1}{2-x},\ \forall x\in(1,2)$$

<u>**Problema 2**</u>**. Fie $a>0$ si functia $f:\left(0,\frac{1}{2a}\right]\to\mathbb{R}$, continua în $x=\frac{1}{2a}$. Determinati functia f stiind ca : $f(x)=f\left(ax^2+\frac{1}{4a}\right),\ \forall x\in\left(0,\frac{1}{2a}\right]$.** **(7)**

(Revista Creatii Matematice seria B nr.1/2007,Ion Bursuc si Maria Nastaselu , profesoara Targu Neamt)

Solutie:

Consideram $a_0\in\left(0,\frac{1}{2a}\right]$ si sirul $(a_n)_{n\geq 0}$ a.î. $a_{n+1}=aa_n^2+\frac{1}{4a}$. Se demonstreaza usor prin inductie matematica ca $a_n\in\left(0,\frac{1}{2a}\right],\ \forall n\in\mathbb{N}$ si cum

$a_{n+1}-a_n=aa_n^2-a_n+\frac{1}{4a}=\left(\sqrt{a}a_n-\frac{1}{2\sqrt{a}}\right)^2\geq 0,\ \forall n\in\mathbb{N}$, rezulta ca sirul $(a_n)_{n\geq 0}$ este crescator. Deci sirul a_n este convergent si din relatia de recurenta

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n=\frac{1}{2a}$. Cum f este continua în $\frac{1}{2a}$ si

$$f(a_{n+1})=f\left(aa_n^2+\frac{1}{4a}\right)=f(a_n),\ \forall n\in\mathbf{N} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(a_n)=f(a_0) \Rightarrow f(a_0)=$$

$\Rightarrow f\left(\frac{1}{2a}\right) = f(x) = f\left(\frac{1}{2a}\right), \forall x \in \left(0,\frac{1}{2a}\right).$

Generalizare **Fie** $a>0, k\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$ **si functia** $f:\left(0,\frac{1}{(ka)^{\frac{1}{k-1}}}\right]\to\mathbb{R}$, **continua**

în $x=\frac{1}{(ka)^{\frac{1}{k-1}}}$ **. Determinati functia *f* stiind ca :**

$$f(x) = f\left(ax^k + \frac{k-1}{k(ka)^{\frac{1}{k-1}}}\right), \forall x \in \left(0,\frac{1}{(ka)^{\frac{1}{k-1}}}\right). \quad \textbf{(8)}$$

Solutie:

Consideram $a_0\in\left(0,\frac{1}{(ka)^{\frac{1}{k-1}}}\right)$ si sirul $(a_n)_{n\ge 0}$ astfel încât $a_{n+1} = aa_n^k + \frac{k-1}{k(ka)^{\frac{1}{k-1}}}$. **(9)**

Se demonstreaza usor prin inductie matematica ca $a_n\in\left(0,\frac{1}{(ka)^{\frac{1}{k-1}}}\right), \forall n\in\mathbb{N}$ si cum

$$a_{n+1} = aa_n^k + \frac{k-1}{k(ka)^{\frac{1}{k-1}}} = aa_n^k + \frac{1}{k(ka)^{\frac{1}{k-1}}} + \frac{1}{k(ka)^{\frac{1}{k-1}}} + \ldots + \frac{1}{k(ka)^{\frac{1}{k-1}}} \ge$$

$$\ge k\sqrt[k]{aa_n^k\left(\frac{1}{k(ka)^{\frac{1}{k-1}}}\right)^{k-1}} = a_n, \forall n\in\mathbb{N}$$

rezulta ca sirul $(a_n)_{n\ge 0}$ este crescator. Deci sirul a_n este convergent si din relatia de recurenta (9) $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{(ka)^{\frac{1}{k-1}}}$.Cum f este continua în $\frac{1}{(ka)^{\frac{1}{k-1}}}$ si

$$f(a_n) = f\left(aa_n^k + \frac{k-1}{k(ka)^{\frac{1}{k-1}}}\right) = f(a_{n+1}), \forall n\in\mathbf{N} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(a_0) \Rightarrow f(a_0) =$$

$$= f\left(\frac{1}{(ka)^{\frac{1}{k-1}}}\right) \Rightarrow f(x) = f\left(\frac{1}{(ka)^{\frac{1}{k-1}}}\right), \forall x \in \left(0,\frac{1}{(ka)^{\frac{1}{k-1}}}\right).$$

Bibliografie

[1] Creatii matematice seria B,nr.2/2007

[2] Gazeta matematica seria B,nr.12/2005