Inegalitati geometrice de tipul Erdös- Mordell într-un poligon convex

Adrian Gobej, Nicusor Minculete

Abstract. Scopul acestui articol este acela de a prezenta extinderea inegalitatii lui Erdös-Mordell de la triunghi la poligon si de a stabili câteva inegalitati de tipul Erdös-Mordell într-un poligon convex, utilizând în principal inegalitatea Cauchy-Buniakowski-Schwarz.
Key words. inegalitate de tipul Erdös-Mordell, inegalitatea Cauchy-Buniakowski-Schwarz

Notiuni introductive

Fie $A_1,\ A_2,\ldots,\ A_n, n ? 3$, vârfurile unui poligon convex si M un punct în interiorul sau. Notam cu R_k distanta de la punctul M la vârful A_k si cu r_k distanta de la punctul M la latura $[A_kA_{k?1}]$ de lungime $A_kA_{k?1} ? a_k$, unde $k ? \overline{1,n}$ si $A_{n?1} ? A_1$. De asemenea, vom nota prin w_k lungimea bisectoarei duse din M în triunghiul $A_kMA_{k?1}$, $?? k ? \overline{1,n}$ si $A_{n?1} ? A_1$.

Plecând de inegalitatea lui Erdös-Mordell, $R_1 ? R_2 ? R_3 ? 2(r_1 ? r_2 ? r_3)$, pentru triunghi, L. Fejes Tóth conjectureaza o inegalitate asemanatoare, referitoare la poligon, aceasta fiind amintita în [1] si [3], astfel

$$\overset{n}{\underset{k?1}{?}} r_k \ ? \cos ?\frac{?}{n}? \overset{n}{\underset{k?1}{?}} R_k\ , \qquad (1)$$

În anul 1961 H.-C. Lenhard demonstreaza inegalitatea (1), întrebuintând inegalitatea

$$\overset{n}{\underset{k?1}{?}} w_k \ ? \cos ?\frac{?}{n}? \overset{n}{\underset{k?1}{?}} R_k\ , \qquad (2)$$

pe care o stabileste în lucrarea [5], unele dintre rezultate fiind mentionate si în [7].

De asemenea, o alta solutie pentru inegalitatea (1) a fost data de M. Dinca în revista *Gazeta Matematica Seria B(GMB)* în anul 1998, vezi [4].

Alta inegalitate de tipul Erdös-Mordell pentru poligoane este data de N. Ozeki în [8] în anul 1957, si anume,

$$\overset{n}{\underset{k?1}{?}} R_k \ ? ?\sec\frac{?}{n}?^{n} \overset{n}{\underset{k?1}{?}} w_k\ , \qquad (3)$$

inegalitate ce demonstreaza inegalitatea 16.8 din [3], adica

$$\overset{n}{\underset{k?1}{?}} R_k \ ? ?\sec\frac{?}{n}?^{n} \overset{n}{\underset{k?1}{?}} r_k\ , \qquad (4)$$

Rezultate principale: Într-un poligon convex $A_1A_2\ldots A_n$ au loc inegalitatile:

$$R_k \ ? \ \frac{r_{k?1} ? r_k}{2\sin\frac{A_k}{2}},\ ?? k ? \overline{1,n},\ \text{cu } r_0 ? r_n. \qquad (9)$$

$$?2\cos\frac{?}{n}?^{n} \overset{n}{\underset{k?1}{?}} R_k \ ? \overset{n}{\underset{k?1}{?}} ?r_{k?1} ? r_k?,\ (r_0 ? r_n). \qquad (10)$$

$$\overset{n}{\underset{k?1}{?}} R_k \sin\frac{A_k}{2} \ ? \overset{n}{\underset{k?1}{?}} r_k\ . \qquad (14)$$

$$\overset{n}{\underset{k?1}{?}} R_k r_k \sin\frac{A_k}{2} \ ? \overset{n}{\underset{k?1}{?}} r_{k?1} r_k\ . \qquad (15)$$

$$\overset{n}{\underset{k?1}{?}} \frac{r_{k?1} ? r_k}{R_k} \ ? 2n\cos\frac{?}{n}\ . \qquad (16)$$

$$\overset{n}{\underset{k?1}{?}} \frac{r_k}{R_k ? R_{k?1}} \ ? \frac{n}{2}\cos\frac{?}{n}\ . \qquad (18)$$