EXAMENE, COLEGII din S.U.A.,
SOLUTII SI GENERALIZARI

IOAN UCU CRISAN, profesor, Grup Scolar de Industrie Alimentara ARAD, membru S.S.M.R., filiala ARAD.

Rezumat al lucrarii

Vom rezolva unele probleme date la examene de analiza matematica an I, la colegii americane, urmate de comentarii si generalizari. Vom prezenta în continare 2 chestiuni din lucrare.

1. Sa se calculeze $\int_0^{\infty} \frac{1}{(x+1)(2x+1)} dx$

Prima generalizare:

Fie $P(x) \in \mathbb{R}[x]$, $grad\, P(x) = 2$, $x_1, x_2 < 0$, radacinile reale ale lui $P(x)$ si $P(x) > 0$, $\forall\, x \geq 0$

Sa se calculeze: $\int_0^{\infty} \frac{1}{P(x)} dx$

A doua generalizare:

Consideram $P(x) \in \mathbb{R}[x]$, $grad\, P(x) = n$, $numar\ par, n \geq 2$, $iar\ x_k < 0, \forall\, k = 1,2,\ldots,n$,

radacinile reale ale lui $P(x)$, $P(x)>0$, $\forall\, x \geq 0$

Notam $a_k=f'(x_{2k})$, $b_k=f'(x_{2k-1})$, $\forall\, k \in N^*$, $2k = n$.

Daca $b_k <0 < a_k$ si $a_k \geq |b_k|$, $\forall\, k \in N^*$, $2k = n$, sa se calculeze $\int_0^{\infty} \frac{1}{P(x)} dx$

2. Determinati extremele functiei $f(x,y) = 3x - 2y + 1$, daca $9x^2 + 4y^2 = 18$, folosind metoda multiplicatorilor lui Lagrange.

O generalizare a acestei probleme este urmatoarea.

Fie $f(x,y)=ax - by + c$, unde $a,b,c \in N^*$, cu $a^2x^2 + b^2y^2 = a^2b$ Sa se determine extremele functiei $f(x,y)$.

Solutia I. (la nivel gimnazial)

Din $a^2x^2 + b^2y^2 = a^2b$, rezulta ca $a^2x^2 = a^2b$, deci $x^2 = b$, adica $x \in \{-\sqrt{b}, \sqrt{b}\}$, iar

$$y^2 = \frac{a^2(b - x^2)}{b^2},\ \text{deci}\ y = \pm \frac{a}{b}\sqrt{b - x^2}$$

Fie cazul $y = \frac{a}{b}\sqrt{b - x^2}$ atunci functia *f(x,y)*, devine *f(x,y)* = $ax - a\sqrt{b - x^2} + c$

Notam $g(x) = ax - a\sqrt{b - x^2} + c,\ g : [-\sqrt{b}, \sqrt{b}] \to \mathbb{R}$

Se demonstreaza usor, prin calcule elementare, ca

$c - a\sqrt{2b} \le g(x) \le c + a\sqrt{b},\ \forall x \in [-\sqrt{b}, \sqrt{b}]$

Solutia II. (la nivel liceal)

Se studiaza derivata functiei *g(x)* de mai sus, pentru $x \in [-\sqrt{b}, \sqrt{b}]$, pe intervalele $[0, \sqrt{b})$ si $(-\sqrt{b}, 0]$, calculându-se si valorile $g(-\sqrt{b})$, $g(\sqrt{b})$, în final se obtine acelasi rezultat de la solutia I.

Solutia III.

Se foloseste metoda multiplicatorilor lui Lagrange (de fapt solutia ceruta în problema din examen).

<u>Observatii.</u>

1) Cazul $y = -\frac{a}{b}\sqrt{b - x^2}$ se solutioneaza analog.

2) Pentru *a = 3, b = 2, c = 1* se obtine solutia din examen.