

# Proprietăți aritmetice ale coeficienților binomiali

de

Cornel Berceanu și Marcelina Mocanu

Numeroase domenii din matematica discretă utilizează proprietăți aritmetice ale coeficienților binomiali. Relații de congruență pentru coeficienții binomiali au fost studiate încă din secolul al XIX-lea de mari matematicieni ca Gauss, Legendre, Lucas, Kummer. Cercetările pe această temă continuă, după cum arată matematicianul A. Granville, într-un articol ex-pozitoriu actualizat permanent cu noi rezultate pe un site dedicat proprietăților aritmetice ale coeficienților binomiali. În 1975, Erdős, Graham, Russa și Straus au demonstrat că pentru orice două numere prime impare  $p$  și  $q$  există o infinitate de numere naturale  $n$  astfel încât coeficientul binomial  $\binom{2n}{n}$  este prim cu produsul  $p \cdot q$ . Este încă o problemă deschisă dacă e infinită sau nu mulțimea numerelor naturale  $n$  pentru care  $\binom{2n}{n}$  este prim cu un produs de trei numere prime impare fixate. Nu vom rezolva această problemă, dar vom trata probleme înrudite.

În această lucrare realizăm un breviar teoretic minimal al temei, incluzând teoremele Lucas, Legendre și Kummer și abordăm, pe baza acestor teoreme sau direct, numeroase probleme reprezentative, pentru care prezentăm rezolvări detaliate. Multe dintre problemele în discuție au fost propuse la concursuri de matematică sau la probe de baraj pentru Olimpiada Internațională de Matematică. Sunt discutate și strategii euristice utile în abordarea unor clase largi de probleme de divizibilitate pentru coeficienți binomiali. Pentru unele din proprietățile aritmetice ale coeficienților binomiali sau ale altor numere remarcabile, cum sunt numerele lui Catalan, sunt prezentate interpretări combinatorice.