Ilustrare „ step by step” a metodelor activ – participative
într-o lectie de matematica

prof. Eleonora Savu
C.N.”Ferdinand I”, Bacau

Vom prezenta în mod structurat aplicarea strategiei euristice într-un proiect didactic cu format non-conventional si câteva comentarii metodice si didactice asupra valorii formative a metodelor activ-participative în predarea matematicii.

PROIECT DIDACTIC

Disciplina : Algebra
Clasa a VI – a (pentru clasele cu un nivel ridicat de pregatire la matematica sau în cadrul disciplinei optionale *Complemente de aritmetica*) .
Unitatea de învatare : Ecuatii si inecuatii în Z .
Continuturi : Rezolvarea unor ecuatii în multimea numerelor întregi .
Tema lectiei : Ecuatii în Z (extindere) ; ecuatii de forma ax + by = c, x, y ? Z
(unde a, b, c ? Z, a ? 0 si b ? 0)
Tipul lectiei : Lectie de fixare si consolidare de cunostinte .

Toate cele patru *obiective cadru* prevazute de programa vor fi în atentia profesorului, dar se va pune accent pe
OC_2 : Dezvoltarea capacitatilor de explorare / investigare si rezolvare de probleme .
OC_4 : Dezvoltarea interesului si a motivatiei pentru studiul si aplicarea matematicii în contexte variate .

Obiective de referinta

Se doreste formarea unei viziuni mai largi asupra rezolvarii ecuatiei ax + by = c (a, b, c ? Z) în numere întregi *(obiectivul de referinta 1.5.)* si consolidarea cunostintelor de divizibilitate *(obiectivul de referinta 1.4.)* .

Lectia va contribui si la îndeplinirea unor obiective de referinta cu bataie lunga : investigarea valorii de adevar a unei afirmatii *(obiectivul de referinta 2.2.)* , formularea de generalizari ale unor enunturi *(obiectivul de referinta 2.3.)* , transpunerea în limbaj matematic a unor fenomene sau relatii din viata cotidiana *(obiectivul de referinta 4.1.)* .

Obiective operationale

Dupa parcurgerea lectiei, elevul va trebui sa fie capabil :
O_1) sa faca aprecieri privind numarul de solutii (în raport cu domeniul ecuatiei si cu coeficientii ei)
O_2) sa determine o solutie particulara (în situatii usor controlabile) si în baza acesteia, sa precizeze forma generala a solutiilor .

O_3) sa precizeze forma generala a solutiilor folosind proprietatile relatiei de divizibilitate.
O_4) sa rezolve probleme concrete (din matematica, discipline conexe sau practica curenta) care conduc la un model ax + by = c, a, b, c? Z, a, b, c date, x, y necunoscute.

Obiectiv afectiv

Crearea unei atitudini favorabile activitatii de rezolvare a problemelor.

Metode si procedee : conversatia euristica, problematizarea, exercitiul, observarea si aprecierea verbala.

Mijloace de învatamânt (resurse) : culegeri, fise de probleme.

Forme de activitate cu elevii : combinate (frontal / individual)

Desfasurarea lectiei / Schema cu comentarii metodice

Consideram binecunoscut tiparul de alcatuire al unui plan de lectie. Ansamblul trebuie sa evidentieze demersul didactic preconizat.

Sugeram ca etapa de verificare a cunostintelor asimilate anterior sa fie limitata în contextul lectiei (profesorul poate verifica selectiv teme pentru acasa, sau poate promova o verificare pentru o ecuatie reductibila la o ecuatie de forma ax = b , a , b ? Z, a ? 0, x ? Z, sau poate opta pentru suprimarea ei din lectie, pentru a câstiga timp în favoarea atingerii obiectivelor operationale stabilite) .

Punerea problemei / provocare / captarea interesului elevilor pentru studiul temei

Profesorul propune spre rezolvare urmatoarea problema:
"George are 10 lei si vrea ca din toti banii sa-si cumpere ciocolata, de doua tipuri.

a) Daca se hotaraste la bucati de 0,8 lei si 1,2 lei, în câte variante poate realiza cumpararea ?
b) Aceeasi cerinta, dar pentru preturile de 0,9 lei si 1,2 lei."

Demers rezolutiv într-o strategie euristica de instruire

a) (P_1) Notam cu x numarul de bucati de ciocolata de 0,8 lei si cu y numarul de bucati de ciocolata de de 1,2 lei.
   (P_2) Tinând cont de datele problemei obtinem ecuatia :
   0,8 x + 1,2 y = 10, unde x, y ? N.
   (P_3) Înmultim ecuatia cu 10, apoi o simplificam prin 4 si obtinem ecuatia echivalenta (1) 2x+3y=25.
   (P_4) Exista numere naturale x, y care verifica ecuatia ?
   (P_5) Da! De exemplu x = 2 si y = 7.
   (P_6) Mai sunt si alte solutii? Cum aflam toate solutiile?
   (P_7) Putem proceda prin considerarea cazurilor posibile pentru y;

y ? {0, 1, … , 8}, pentru ca 3y < 25.Pentru fiecare valoare a lui y obtinem câte o ecuatie de forma 2x = b, b ? N. Convin numai cazurile când aceasta ecuatie are solutie în N. În final, obtinem trei solutii în numere naturale pentru ecuatia (1). Acestea sunt (2, 7) , (5, 5) , (8, 3).
Raspuns : George poate realiza cumpararea în trei moduri.

b) (P_8) Notam cu x numarul de bucati de ciocolata de 0,9 lei si cu y numarul de bucati de ciocolata de 1,2 lei.
(P_9) Obtinem ecuatia 0,9 x + 1,2 y = 10.
(P_{10}) Ecuatia este echivalenta cu ecuatia (2) 9x + 12 y = 100, x, y ? N.
(P_{11}) Putem proceda ca la a) si constatam ca ecuatia (2) nu are solutii naturale. Raspuns : Problema nu are solutii daca George opteaza pentru bucati de ciocolata de 0,9 lei si, respectiv 1,2 lei.
(P_{12}) Puteti da alta metoda de rezolvare pentru (1), sau pentru (2)?
(P_{13}) Din (1), aflam pe y în functie de x (sau x se afla în functie de y).

(3) $y ? \dfrac{25 ? 2x}{3}$ este natural daca 3 / (25 – 2x).

Din 3 / (25 – 2x) si 3 / (24 – 3x) rezulta ca 3 / (1 + x). Exista k ? N a.î. x = 3k – 1. Înlocuim în (3) si obtinem y = 9 – 2k.
x, y ? N daca k ? {1, 2, 3} si obtinem solutiile (2, 7), (5, 5), (8, 3).

Ecuatia (2) este echivalenta cu 3(3x + 4y) = 100. Aceasta ecuatie nu are solutii întrucât 3 nu divide 100.
(P_{14}) Ecuatia (1) admite si alte *solutii întregi* în afara de cele determinate la (P_7) ?
(P_{15}) Da! De exemplu, x = – 1 si y = 9.
(P_{16}) Putem determina toate solutiile întregi ale ecuatiei (1)? Ce forma au ele? Avem un numar finit de solutii sau o infinitate de solutii?
(P_{17}) Daca folosim metoda de rezolvare de la (P_{13}), gasim ca

(4) x = 3k – 1, y = 9 – 2k, k ? Z.

(P_{18}) (4) ne da *solutia generala* a ecuatiei 2x + 3y = 25, x, y ? Z.
(P_{19}) Ecuatia (1) are o infinitate de solutii în numere întregi, dar numai un numar finit de solutii în numere naturale. Ecuatia (2) nu are solutii întregi (ramâne valabila justificarea de la (P_{13})).
(P_{20}) Putem afla solutia generala a ecuatiei (1) pornind de la o solutie particulara. De exemplu, am vazut ca (– 1, 9) este o solutie a ecuatiei (1) si fie (x, y) o solutie arbitrara în numere întregi a ecuatiei.
Din 2x + 3y = 25 si 2.(– 1) + 3.9 = 25, obtinem prin scadere
2(x + 1) + 3(y – 9) = 0 ? 2(x + 1) = – 3(y – 9).
De aici, rezulta ca 3 / 2(x + 1), deci 3 / x + 1, adica x = 3k – 1, k ? Z.
Din 2(3k – 1) + 3y = 25 obtinem y = 9 – 2k.
(P_{21}) Daca nivelul de pregatire al clasei este destul de ridicat sau daca aceasta tema intra în programul de pregatire al elevilor pentru olimpiada, se pot face aprecieri ceva mai generale privind rezolvarea ecuatiei (5) ax + by = c, unde a, b, c ? Z, ab ? 0, în multimea numerelor întregi (x, y ? Z).

(I) Daca d = (a, b) si d nu divide c, atunci ecuatia (5) nu are solutii întregi.
(P_{22}) Construiti ecuatii de forma (5) care nu au solutii întregi! Se scriu câteva exemple pe tabla!

(II) Daca $d = (a, b)$ si d / c, atunci $a = da'$, $b = db'$, $c = dc'$, unde a', b',c' sunt numere întregi. Simplificam ecuatia (5) prin d si obtinem ecuatia echivalenta (6) $a'x + b'y = c'$, cu a'si b' prime între ele. Ecuatia (6) are o infinitate de solutii, care se determina folosind una din cele doua metode expuse anterior.

(P_{23}) Fiecare din cele doua metode prezinta avantaje si dezavantaje în practica rezolvarii ecuatiilor de forma (6), cazul (II).

Daca pentru (6) gasim relativ usor o solutie particulara (x_0, y_0), atunci din $a'x+b'y=c'$ si $a'x_0+b'y_0=c'$ rezulta $a'(x - x_0)+b'(y - y_0) = 0$ s,a.m.d. Astfel, gasim solutia generala pornind de la solutia particulara (x_0, y_0).Sunt cazuri când nu putem afla usor o solutie particulara si atunci trebuie sa recurgem la proprietatile relatiei de divizibilitate, asa cum am procedat la (P_{13}).

(P_{24}) *Probleme propuse*

1) $7x + 4y = 39$, x, y ? Z
2) $81^x : 27^y = 3$, x, y ? Z
3) Fie n? N* si x, y ? N. Câte solutii are ecuatia $4^x \cdot 8^y = 64^n$?

(P_{25}) Elevii vor participa activ la rezolvarea problemelor propuse.

(P_{26}) Profesorul va nota la sfârsitul orei elevii care s-au remarcat prin frecventa raspunsurilor bune si foarte bune.

(P_{27}) Tema pentru acasa : problemele din fisa.

Fisa de probleme

1. Rezolvati ecuatiile :
   a) $4x + 3y = 32$, x, y ? N
   b) $14x + 7y = 54$, x, y ? Z
   c) $15x - 36y = 33$, x, y ? Z
2. Aflati x, y ? Z daca $16^{2x-1} : 8^{2y+1} = 32$.
3. " – Dati-mi, va rog, de toti banii, câteva timbre de 0,2 lei bucata, de zece ori mai multe timbre de 0,1 lei bucata, iar de rest timbre de 0,5 lei bucata!". Cumparatorul va întinde o bancnota de 10 lei. Cum onorati aceasta comanda?

Comentarii metodice si didactice

1)Asigurarea conexiunii inverse se va realiza pe parcursul predarii-învatarii noilor cunostinte, prin întrebari adecvate, formulate intermitent (vezi P_4, P_6, P_{12}, P_{14}, P_{16}), profesorul având posibilitatea sa urmareasca modul în care elevii participa la realizarea obiectivelor lectiei. Acestea vor constitui cadrul de referinta pentru masurarea si aprecierea performantelor obtinute. Elevii vor fi solicitati sa îndeplineasca sarcinile de învatare din secventele P_1, P_2, P_3, P_5, P_7, P_8, P_9, P_{10}, P_{11}, (partial) P_{13}, P_{15}, (partial) P_{17}, P_{19}, P_{22}, P_{25} si, desigur $P_{24} - P_{25}$.

În scopul fixarii cunostintelor predate, al stabilizarii lor printr-o corecta sistematizare si organizare a exercitiilor aplicative am folosit *Fisa de probleme*. În tema am propus aplicatii asemanatoare celor rezolvate în clasa întrucât actul rezolutiv este considerat, printre altele, si un act de reconstructie mintala a unor structuri deja cunoscute. Psihologii au constatat ca dezvoltarea proceselor cognitive ale omului nu este posibila fara procesele imitatiei constiente si, pe de alta parte, la baza procesului de învatare se afla secventa imitativa. Ce câstigãm prin aceasta? În cursul rezolvãrii problemelor, anumite automatisme elibereazã inteligenta pentru alte sarcini cognitive mai complexe.

2)Strategiile didactice de tip *euristic* aplicate la lectiile de matematica îi încurajeaza pe elevi sa construiasca tehnici de învatare a cunostintelor, de rezolvare a problemelor, si în timp sa-si formeze strategii cognitive, asa încât pe baza acestora sa poata realiza în mod constient si eficient, obiectivele de tip formativ ale insturirii la matematica. Pentru a rezolva o problema, elevul trebuie sa-si actualizeze reguli învatate anterior, sa le combine si apoi, sa ajunga la o regula de ordin superior.Profesorul de matematica are menirea de a-l scoate pe elev din postura de "receptor" al unor informatii transmise prin metode preponderent expositive, deci pasive si sa-l învete sa participe la procesul care face posibila crearea de cunostinte, sa-l determine sa gândeasca el însusi matematic. Una din metodele matematice cu puternice valente formative este *metoda problematizarii*, folosita si în proiectul didactic propus.

3)*Rezolvarea de probleme si metoda problematizarii*

Metoda de învatare prin problematizare este o metoda din clasa celor *activ-participative* care antreneaza elevul în învatare prin punere si rezolvare de probleme. În predarea problematizata, profesorul are rolul de a crea asemenea dezacorduri între un nivel de cunoastere al elevului si cel spre care se doreste a fi asimilat, încât sesizarea contradictiei, a diferentei sa stârneasca la elevi o atitudine favorabila dobândirii de noi cunostinte. Superioara învatarii bazata pe transmitere de cunostinte (în care elevii îsi însusesc cunostintele, organizate într-un sistem în care sunt date toate elementele componente si legaturile între ele), predarea /invatarea problematizata îl provoaca pe elev sa descopere legaturile care lipsesc si sa îmbine elementele date astfel încât sa apara noi asociatii.

Dupa W. Okon ("Învatamântul problematizat în scoala contemporana", EDP, Bucuresti, 1978), predarea problematizata si corespunzator, învatarea problematizata presupune urmatoarele activitati-etape:

Predarea problematizata	*Invatarea problematizata*
(1) organizarea situatiilor problematice	
(2) formularea problemelor	(2) sesizarea si formularea problemelor
(3) acordarea ajutorului necesar elevilor în rezolvarea problemelor si verificarea solutiilor	(3) rezolvarea si verificarea solutiilor

(4) coordonarea procesului de sistematizare si fixare a cunostintelor dobândite.

Eficienta acestei metode se masoara si prin *gradul de activizare* a elevilor, la nivelul posibilitatilor fiecaruia. Daca un elev reuseste sa realizeze singur etapele (2) si (3) putem vorbi de o independenta deplina a sa în învatare. Gradul de independenta al elevului este mai mic pe masura ce profesorul realizeaza (2) si foarte mic daca elevul realizeaza doar o operatie din etapa (3), pâna când devine aproape dependent de sarcina si de aceea metoda problematizarii trebuie combinata cu alte metode si aplicata în functie de *posibilitatile de problematizare a continutului stiintific*. Eficienta în învatarea problematizata se masoara si prin evaluarea cunostintelor, nu doar imediat dupa lectie, ci si dupa o perioada mai lunga de timp, dar mai ales în formarea unor deprinderi de tehnica si rationament si a unor capacitati intelectuale.

Bibliografie

1. F. Cârjan, *Didactica matematicii*, Ed.Corint, Bucuresti, 2002
2. *Ghid metodologic pentru aplicarea programelor de matematica/primar – gimnaziu*, Ed. Aramis Print, Bucuresti, 2001
3. W. Okon, *Învatamântul problematizat în scoala contemporana*, EDP, Bucuresti,1978
4.Eleonora Savu, *Ecuatii diofantice* (lucrare pentru obtinerea gradului didactic I)