Asupra unei probleme de concurs

Neculai Roman

În Revista de Matematică din Timişoara nr. 1/2002 se află problema:

C.2002.2. Fie $\mathcal{C}$ un cerc circumscris triunghiului ABC, iar A_1 centrul cercului tangent la AB, AC si la $\mathcal{C}$. În mod analog construim punctele B_1 şi C_1. Demonstraţi că dacă $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC$ atunci ABC este un triunghi echilateral (Andrei Jorza).

În enunţul problemei se spune "A_1 este centrul cercului tangent la AB, AC şi la $\mathcal{C}$". Se pune întrebarea: la care cerc tangent la AB, AC şi la $\mathcal{C}$ se referă autorul? La cel tangent interior sau la cel tangent exterior cercului $\mathcal{C}$? Să zicem că se referă la ambele cazuri. În cazul în care cercul tangent la AB, AC şi la $\mathcal{C}$ este tangent exterior cercului $\mathcal{C}$ avem trei cazuri:

1. tangent la $(AB$, $(AC$ şi la $\mathcal{C}$;
2. tangent la $(AB$, $(CA$ şi la $\mathcal{C}$;
3. tangent la $(BA$, $(AC$ şi la $\mathcal{C}$.

La care se referă autorul?

În Revista de Matematică din Timişoara nr. 2/2002 se află o soluţie a problemei C.2002.2. Citez din soluţie:

"Considerăm inversiunea $I(A, bc)(BC = a, AC = b, AB = c)$. $I(B) = B'$ cu $AB' = b$, $I(C) = C'$ cu $AC' = c$. În această situaţie $\mathcal{C}$ se transformă în $B'C'$, iar cercul tangent la AB, AC, respectiv $\mathcal{C}$ în cercul înscris în triunghiul $AB'C'$. Datorită simetriei $\triangle AB'C'$ şi $\triangle ABC$ faţă de AA_1, vom avea $I(A_1) = I$, I este centrul cercului înscris în $\triangle ABC$".

În prima parte a acestei lucrări vom arăta că soluţia problemei C.2002.2 din Revista de Matematică din Timişoara nr. 2/2002 nu este corectă, iar în partea a doua vom da o soluţie a problemei C.2002.2 în cazul în care A_1 este centrul cercului tangent la $(AB$, $(AC$ şi la $\mathcal{C}$.

Pentru prezentarea acestei lucrări avem nevoie de următoarele rezultate:

Definiţie. *Fiind date două cercuri $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$ de centre O_1 şi respectiv O_2, numim distanţă tangenţială între cercurile $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$ (şi notăm $d_{O_1O_2}$) lungimea tangentei comune exterioare duse la cele două cercuri (lungimea segmentului cuprins între cele două puncte de tangenţă).*

Teorema 1 (Casey) *Dacă cercurile $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ şi $\mathcal{C}_4$ de centre O_1, O_2, O_3 şi respectiv O_4 sunt tangente interior cercului $\mathcal{C}$ (presupun orientarea în ordinea numerotării) atunci avem următoarea relaţie între distanţele tangenţiale dintre cercuri:*

$$d_{O_1O_2} \cdot d_{O_3O_4} + d_{O_1O_4} \cdot d_{O_2O_3} = d_{O_1O_3} \cdot d_{O_2O_4}.$$

Rezultatul este valabil şi în cazul în care cercurile $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ şi $\mathcal{C}_4$ sunt tangente exterior cercului $\mathcal{C}$ (vezi [1]).

Teorema 2 *Dacă $\mathcal{C}$ este un cerc de centru C ce nu trece prin P, atunci $I_{P,p}(\mathcal{C})$ este un cerc $\mathcal{D}$ de centru D încât $\overline{PD} = \dfrac{p}{\mathcal{C}(P)} \cdot \overline{PC}$.*

($I_{P,p}$ este inversiunea de pol P şi putere p, iar $\mathcal{C}(P)$ este puterea punctului P faţă de cercul $\mathcal{C}$.)

Observaţie. Centrul D al cercului $\mathcal{D} = I_{P,p}(\mathcal{C})$ nu este imagine prin $I_{P,p}$ a centrului C al cercului $\mathcal{C}$. Într-adevăr, egalitatea

$$\overline{PD} \cdot \overline{PC} = p \iff \frac{p}{\mathcal{C}(P)} \cdot \overline{PC}^2 = p \iff \mathcal{C}(P) = PC^2,$$

egalitate imposibilă deoarece $\mathcal{C}(P) = PC^2 - r^2$ şi evident $r^2 \neq 0$ (vezi [2]).

Teorema 3 *Inversiunea este o transformare conformă (adică păstrează unghiul a două curbe) (vezi [2]).*

În continuare demonstrăm următoarele:

Teorema 4 *Dacă I_a este centrul cercului exînscris triunghiului ABC, tangent laturii $[BC]$ şi I este centrul cercului înscris în triunghiul ABC atunci $I_{A,bc}(I_a) = I$ ($b = AC$, $c = AB$, iar $I_{A,bc}$ este inversiunea de pol A şi putere bc).*

Demonstraţie. Fie $IM \perp AC$, $M \in AC$ şi $I_aM_a \perp AC$, $M_a \in AC$ (fig. 1).

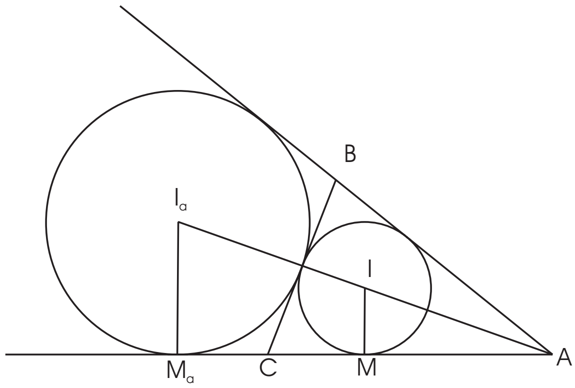

Fig. 1:

În $\triangle AMI$ dreptunghic:

$$\cos\frac{A}{2} = \frac{AM}{AI} \iff AI = \frac{AM}{\cos\frac{A}{2}} \quad (*)$$

În $\triangle AM_aI_a$ dreptunghic:

$$\cos\frac{A}{2} = \frac{AM_a}{AI_a} \iff AI_a = \frac{AM_a}{\cos\frac{A}{2}} \quad (**)$$

Din relaţiile $(*)$ şi $(**)$ rezultă:

$$AI \cdot AI_a = \frac{AM \cdot AM_a}{\cos^2\dfrac{A}{2}} \iff AI \cdot AI_a = \frac{p(p-a)}{\dfrac{p(p-a)}{bc}} \iff AI \cdot AI_a = bc.$$

Teorema 5 *Fie $\mathcal{C}$ cercul circumscris triunghiului ABC, $\mathcal{I}$ cercul înscris în triunghiul ABC, $\mathcal{I}_a$ cercul exînscris triunghiului ABC, tangent laturii $[BC]$ şi $\mathcal{A}_1$ cercul tangent la $(AB$, $(AC$ şi la $\mathcal{C}$. Arătaţi că:*

1. *dacă $\mathcal{A}_1$ este tangent exterior cercului $\mathcal{C}$ atunci $I_{A,bc}(\mathcal{A}_1) = \mathcal{I}$;*

2. *dacă $\mathcal{A}_1$ este tangent interior cercului $\mathcal{C}$ atunci $I_{A,bc}(\mathcal{A}_1) = \mathcal{I}_a$;*

Demonstraţie. Urmărim pe figurile 2 şi 3.

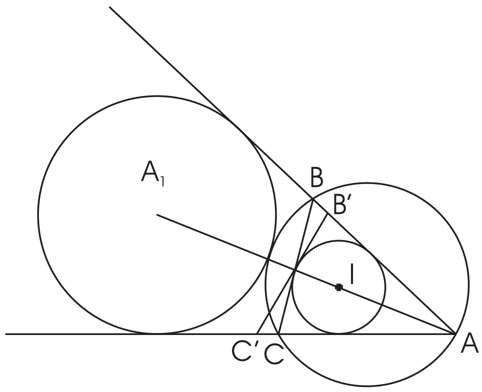

Fig. 2:

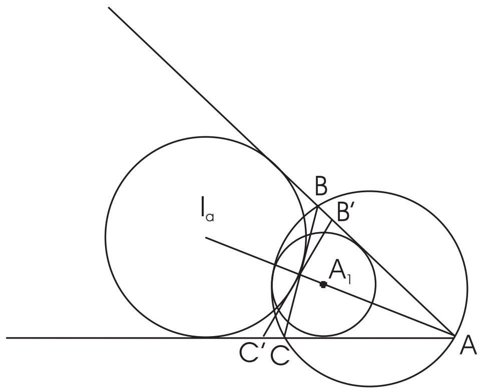

Fig. 3:

Fie $I_{A,bc}(B) = B'$ şi $I_{A,bc}(C) = C'$. În această situaţie $I_{A,bc}(\mathcal{C}) = B'C'$.

Deoarece cercul $\mathcal{A}_1$ nu trece prin A, $I_{A,bc}(\mathcal{A}_1)$ este un cerc ce nu trece prin A (conform teoremei 2). Pentru că $\mathcal{A}_1$ este un cerc tangent la $(AB$, $(AC$ şi la $\mathcal{C}$, $I_{A,bc}(\mathcal{A}_1)$ este un cerc tangent la $(AB$, $(AC$ şi $B'C'$ (conform teoremei 3). Datorită simetriei triunghiurilor ABC şi $AB'C'$ faţă de AA_1 rezultă că $I_{A,bc}(\mathcal{A}_1)$ este un cerc tangent la $(AB$, $(AC$ şi BC.

1. Dacă $\mathcal{A}_1$ este tangent exterior cercului $\mathcal{C}$ atunci $I_{A,bc}(\mathcal{A}_1) = \mathcal{I}$ (fig. 2).

2. Dacă $\mathcal{A}_1$ este tangent interior cercului $\mathcal{C}$ atunci $I_{A,bc}(\mathcal{A}_1) = \mathcal{I}_a$ (fig. 3).

Observaţie. Soluţia problemei C.2002.2 din Revista de Matematică din Timişoara nr. 2/2002 nu este corectă pentru că dacă cercul tangent la AB, AC şi la $\mathcal{C}$ este tangent exterior cercului $\mathcal{C}$, atunci afirmaţia "cercul tangent la AB, AC şi $\mathcal{C}$ se transformă în cercul înscris în $\triangle AB'C'$" este corectă conform teoremei 5.1) dacă autorul soluţiei se referă la cercul tangent la $(AB$, $(AC$, şi la $\mathcal{C}$, dar "$I_{A,bc}(A_1) = I$" nu este corectă conform observacţiei de la teorema 2. Dacă cercul tangent la AB, AC şi $\mathcal{C}$ este tangent interior cercului $\mathcal{C}$, atunci afirmaţia "cercul tangent la AB, AC şi $\mathcal{C}$ se transformă în cercul înscris în $\triangle AB'C'$" nu este corectă conform teoremei 5.2), iar "$I_{A,bc}(A_1) = I$" nu este corectă deoarece, conform teoremei 4, $I_{A,bc}(I_a) = I$ şi, evident, $A_1 \neq I_a$.

În concluzie, soluţia problemei C.2002.2nu este corectă pentru că autorul soluţiei se foloseşte de relaţia

$$I_{A,bc}(A_1) = I \iff AA_1 = \frac{bc}{AI}$$

care nu este corectă.

Soluţia problemei C.2002.2
Cazul în care A_1 este centrul cercului tangent la $(AB$, $(AC$ şi la $\mathcal{C}$

Fie $\mathcal{A}_1$ cercul de centru A_1, tangent la $(AB$, $(AC$ şi la $\mathcal{C}$, I centrul cercului înscris în $\triangle ABC$, $IM \perp AC$, $M \in AC$, $A_1M_1 \perp AC$, $M_1 \in AC$ şi $A_1M_1' \perp AB$, $M_1' \in AB$. Distingem două cazuri:

I. Cercul $\mathcal{A}_1$ este tangent exterior cercului $\mathcal{C}$ (fig. 4)

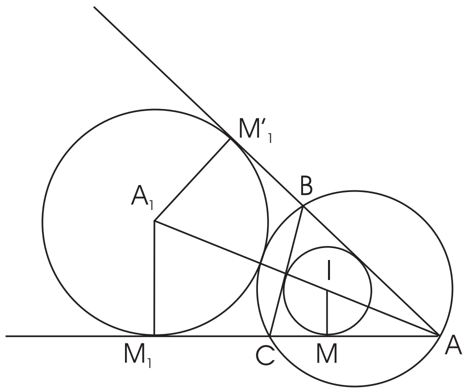

Fig. 4:

Din $\triangle AMI$ dreptunghic rezultă:

$$\cos\frac{A}{2} = \frac{AM}{AI} \iff AI = (p-a)\sqrt{\frac{bc}{p(p-a)}} \tag{1}$$

În $\triangle AM_1A_1$ dreptunghic avem:

$$\cos\frac{A}{2} = \frac{AM_1}{AA_1} \iff AA_1 = \frac{AM_1}{\cos\frac{A}{2}} \tag{2}$$

Aplicăm teorema lui Casey cercurilor A, B, $\mathcal{A}_1$, C (A, B, C degenerate) tangente exterior cercului $\mathcal{C}$ şi obţinem:

$$\begin{aligned} AB \cdot CM_1 + AC \cdot BM_1' = AM_1 \cdot BC \iff c(AM_1 - b) + b(AM_1 - c) = AM_1 \cdot a \\ \iff c \cdot AM_1 + b \cdot AM_1 - a \cdot AM_1 = 2bc \iff AM_1 = \frac{bc}{p-a} \end{aligned} \tag{3}$$

Din relaţiile (2) şi (3) rezultă:

$$AA_1 = \frac{bc}{p-a} \cdot \sqrt{\frac{bc}{p(p-a)}} \tag{4}$$

Din $IA_1 = AA_1 - AI$ folosind relaţiile (1) şi (4) avem:

$$IA_1 = \sqrt{\frac{bc}{p(p-a)}} \cdot \left[\frac{bc - (p-a)^2}{p-a}\right] \tag{5}$$

Analog:
$$IB_1 = \sqrt{\frac{ac}{p(p-b)}} \cdot \left[\frac{ac-(p-b)^2}{p-b}\right], IC_1 = \sqrt{\frac{ab}{p(p-c)}} \cdot \left[\frac{ab-(p-c)^2}{p-c}\right] \tag{6}$$
Dar
$$bc-(p-a)^2 = ac-(p-b)^2 = ab-(p-c)^2 = \frac{2ab+2ac+2bc-a^2-b^2-c^2}{4} = K \tag{7}$$
Din relaţiile (5), (6) şi (7) obţinem:
$$IA_1 = \sqrt{\frac{bc}{p(p-a)}} \cdot \frac{k}{p-a}, IB_1 = \sqrt{\frac{ac}{p(p-b)}} \cdot \frac{k}{p-b}, IC_1 = \sqrt{\frac{ab}{p(p-c)}} \cdot \frac{k}{p-c} \tag{8}$$
Dar $m(\angle B_1IC_1) = m(\angle BIA) + m(\angle AIC_1) \iff m(\angle B_1IC_1) = \frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{A}{2} + \frac{C}{2}$, deci:
$$m(\angle B_1IC_1) = 90^\circ + \frac{A}{2} \tag{9}$$
Din teorema cosinusului în $\triangle B_1IC_1$ şi relaţia (9):
$$B_1C_1^2 = IB_1^2 + IC_1^2 - 2IB_1 \cdot IC_1 \cos(90^\circ + \frac{A}{2}) \iff B_1C_1^2 = IB_1^2 + IC_1^2 + 2IB_1 \cdot IC_1 \sin\frac{A}{2}$$
(folosind relaţiile (8)) $\iff$
$$B_1C_1^2 = \frac{K^2ac}{p(p-b)^3} + \frac{K^2ab}{p(p-c)^3} + \frac{2K^2}{(p-b)(p-c)} \cdot \sqrt{\frac{a^2bc}{p^2(p-b)(p-c)}} \cdot \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} \iff$$
$$B_1C_1^2 = \frac{K^2ac}{p(p-b)^3} + \frac{K^2ab}{p(p-c)^3} + \frac{2K^2a}{p(p-b)(p-c)} \tag{10}$$
Analog:
$$A_1B_1^2 = \frac{K^2ac}{p(p-b)^3} + \frac{K^2bc}{p(p-a)^3} + \frac{2K^2c}{p(p-a)(p-b)} \tag{11}$$
$$A_1C_1^2 = \frac{K^2ab}{p(p-c)^3} + \frac{K^2bc}{p(p-a)^3} + \frac{2K^2b}{p(p-a)(p-c)} \tag{12}$$
Din $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC \iff \frac{B_1C_1^2}{a^2} = \frac{A_1C_1^2}{b^2} = \frac{A_1B_1^2}{c^2}$ folosind relaţiile (10), (11) şi (12) avem:
$$\begin{aligned}\frac{c}{a(p-b)^3} + \frac{b}{a(p-c)^3} + \frac{2}{a(p-b)(p-c)} &= \frac{c}{b(p-a)^3} + \frac{a}{b(p-c)^3} + \frac{2}{b(p-a)(p-c)} = \\ &= \frac{a}{c(p-b)^3} + \frac{b}{c(p-a)^3} + \frac{2}{c(p-a)(p-b)}\end{aligned} \tag{13}$$
Considerăm:
$$\frac{c}{a(p-b)^3} + \frac{b}{a(p-c)^3} + \frac{2}{a(p-b)(p-c)} = \frac{c}{b(p-a^3)} + \frac{a}{b(p-c)^3} + \frac{2}{b(p-a)(p-c)} \iff$$

$$\left[\frac{c}{a(p-b)^3}-\frac{c}{b(p-a)^3}\right]+\left[\frac{b}{a(p-c)^3}-\frac{a}{b(p-c)^3}\right]+\left[\frac{2}{a(p-b)(p-c)}-\frac{2}{b(p-a)(p-c)}\right]=0 \iff$$

$$\frac{c[b(p-a)^3-a(p-b)^3]}{ab(p-a)^3(p-b)^3}+\frac{b^2-a^2}{ab(p-c)^3}+\frac{2[b(p-a)-a(p-b)]}{ab(p-a)(p-b)(p-c)}=0 \iff$$

$$\frac{c(b-a)[p^3-ab(p+c)]}{(p-a)^3(p-b)^3}+\frac{(b-a)(b+a)}{(p-c)^3}+\frac{2p(b-a)}{(p-a)(p-b)(p-c)}=0 \iff$$

$$(b-a)\left\{\frac{c[p^3-ab(p+c)]}{(p-a)^3(p-b)^3}+\frac{a+b}{(p-c)^3}+\frac{2p}{(p-a)(p-b)(p-c)}\right\}=0 \iff$$

$$a=b \text{ deoarece } \frac{c[p^3-ab(p+c)]}{(p-a)^3(p-b)^3}+\frac{a+b}{(p-c)^3}+\frac{2p}{(p-a)(p-b)(p-c)}>0$$

pentru că: $\frac{a+b}{(p-c)^3}>0$, $\frac{2p}{(p-a)(p-b)(p-c)}>0$ şi $\frac{c[p^3-ab(p+c)]}{(p-a)^3(p-b)^3}>0$ ($\sqrt[3]{ab(p+c)}<\frac{a+b+p+c}{3} \iff ab(p+c)<p^3$).

Analog $b=c$.

Prin urmare relaţiile (13) sunt echivalente cu $a=b=c$, adică ABC este un triunghi echilateral.

II. Cercul $\mathcal{A}_1$ este tangent interior cercului $\mathcal{C}$ (fig. 5)

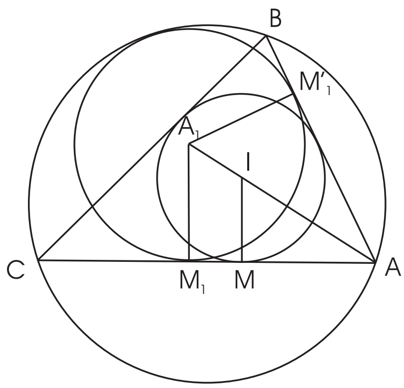

Fig. 5:

Din $\triangle AM_1A_1$ dreptunghic rezultă:

$$\cos\frac{A}{2}=\frac{AM_1}{AA_1} \iff AA_1=\frac{AM_1}{\cos\frac{A}{2}} \tag{14}$$

Aplicăm teorema lui Casey cercurilor A, B, $\mathcal{A}_1$, C (A, B, C degenerate) tangente interior cercului $\mathcal{C}$ şi obţinem:

$$AB\cdot CM_1+AC\cdot BM_1'=AM_1\cdot BC \iff c(b-AM_1)+b(c-AM_1)=AM_1\cdot a \iff$$

$$a\cdot AM_1+b\cdot AM_1+c\cdot AM_1=2bc \iff AM_1=\frac{bc}{p} \tag{15}$$

Din relaţiile (14) şi (15) rezultă:

$$AA_1 = \frac{bc}{p}\sqrt{\frac{bc}{p(p-a)}} \tag{16}$$

Din $IA_1 = AA_1 - AI$ folosind relaţiile (1) şi (16) avem:

$$IA_1 = \sqrt{\frac{bc}{p(p-a)}} \cdot \left[\frac{bc}{p} - (p-a)\right] \iff IA_1 = \sqrt{\frac{bc}{p(p-a)}} \cdot \frac{(p-b)(p-c)}{p} \tag{17}$$

Analog:

$$IB_1 = \sqrt{\frac{ac}{p(p-b)}} \cdot \frac{(p-a)(p-c)}{p} \tag{18}$$

$$IC_1 = \sqrt{\frac{ab}{p(p-c)}} \cdot \frac{(p-a)(p-b)}{p} \tag{19}$$

Din teorema cosinusului în $\triangle B_1IC_1$ şi relaţia (9):

$$B_1C_1^2 = IB_1^2 + IC_1^2 - 2IB_1 \cdot IC_1 \cos(90^\circ + \frac{A}{2}) \iff B_1C_1^2 = IB_1^2 + IC_1^2 + 2IB_1 \cdot IC_1 \sin\frac{A}{2}$$

folosind relaţiile (18) şi (19) $\iff$

$$B_1C_1^2 = \tfrac{ac(p-a)^2(p-c)^2}{p^3(p-b)} + \tfrac{ab(p-a)^2(p-b)^2}{p^3(p-c)} + \tfrac{2a(p-a)^2(p-b)(p-c)}{p^3} \tag{20}$$

Analog:

$$A_1B_1^2 = \frac{ac(p-a)^2(p-c)^2}{p^3(p-b)} + \frac{bc(p-b)^2(p-c)^2}{p^3(p-a)} + \frac{2c(p-a)(p-b)(p-c)^2}{p^3} \tag{21}$$

$$A_1C_1^2 = \frac{ab(p-a)^2(p-b)^2}{p^3(p-c)} + \frac{bc(p-b)^2(p-c)^2}{p^3(p-a)} + \frac{2b(p-a)(p-b)^2(p-c)}{p^3} \tag{22}$$

Din $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC \iff \frac{B_1C_1^2}{a^2} = \frac{A_1C_1^2}{b^2} = \frac{A_1B_1^2}{c^2}$ folosind relaţiile (20), (21) şi (22) avem:

$$\begin{aligned}
&\frac{c(p-a)^2(p-c)^2}{ap^3(p-b)} + \frac{b(p-a)^2(p-b)^2}{ap^3(p-c)} + \frac{2(p-a)^2(p-b)(p-c)}{ap^3} = \\
&= \frac{a(p-a)^2(p-b)^2}{bp^3(p-c)} + \frac{c(p-b)^2(p-c)^2}{bp^3(p-a)} + \frac{2(p-a)(p-b)^2(p-c)}{bp^3} = \\
&= \frac{a(p-a)^2(p-c)^2}{cp^3(p-b)} + \frac{b(p-b)^2(p-c)^2}{cp^3(p-a)} + \frac{2(p-a)(p-b)(p-c)^2}{cp^3} \Bigg| \cdot \frac{p^3}{(p-a)^2(p-b)^2(p-c)^2} \iff
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\iff \frac{c}{a(p-b)^3} + \frac{b}{a(p-c)^3} + \frac{2}{a(p-b)(p-c)} &= \frac{a}{b(p-c)^3} + \frac{c}{b(p-a)^3} + \frac{2}{b(p-a)(p-c)} = \\
&= \frac{a}{c(p-b)^3} + \frac{b}{c(p-a)^3} + \frac{2}{c(p-a)(p-b)}
\end{aligned}$$

adică relaţiile (13) sunt echivalente cu $a = b = c$.

Prin urmare ABC este un triunghi echilateral.

Bibliografie

[1] Marius Drăguşin: "Despre utilitatea unui rezultat prea puţin folosit: Teorema lui Casey", Gazeta Matematică nr. 12/1995;

[2] D. Brânzei, C. Aniţa, C. Cocea: "Planul şi spaţiul euclidian", Editura Academiei, Bucureşti, 1986, pp. 92–96.

Profesor, Şcoala "Vasile Alecsandri"
Mirceşti, Iaşi