# UN ALT PUNCT DE VEDERE

# ASUPRA POLIGONULUI DE $n$ LATURI REGULAT

**Propunatori: Prof. Cleopatra Olaru, Liceul Pedagogic „Gh. Asachi” Piatra Neamt**

**Prof. Liviu-Constantin Olaru, Colegiul National „Petru Rares” Piatra Neamt**

Se considera un poligon de $n$ laturi regulat $ABCD\ldots N$ si $O$ centrul cercului circumscris poligonului. Fie $A_1$ centrul de greutate al $\triangle OAB$, $B_1$ centrul de greutate al $\triangle OBC$, $C_1$ centrul de greutate al $\triangle OCD$, ..., $N_1$ centrul de greutate al $\triangle ONA$. Fie $A_2$ centrul de greutate al $\triangle OA_1B_1$, $B_2$ centrul de greutate al $\triangle OB_1C_1$, $C_2$ centrul de greutate al $\triangle OC_1D_1$, ..., $N_2$ centrul de greutate al $\triangle ON_1A_1$. Fie $A_3$ centrul de greutate al $\triangle OA_2B_2$, $B_3$ centrul de greutate al $\triangle OB_2C_2$, $C_3$ centrul de greutate al $\triangle OC_2D_2$,..., $N_3$ centrul de greutate al $\triangle ON_2A_2$. ... Se continua rationamentul astfel încât la al n-lea pas avem $A_n$ centrul de greutate al $\triangle OA_{n-1}B_{n-1}$, $B_n$ centrul de greutate al $\triangle OB_{n-1}C_{n-1}$, $C_n$ centrul de greutate al $\triangle OC_{n-1}D_{n-1}$, ..., $N_n$ centrul de greutate al $\triangle ON_{n-1}A_{n-1}$.

Se constata ca:

1. Polinoamele $A_iB_iC_iD_i\ldots N_i$ cu $i = \overline{1,n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, obtinute prin rationamentul de mai sus sunt poligoane de $n$ laturi regulate, cu acelasi centru de greutate $O$.
   Demonstratie: Evident, având în vedere ca centrul de greutate coincide cu centrul cercului circumscris poligoanelor regulate care este la intersectia mediatoarelor laturilor poligoanelor regulate.
2. Daca raportam figura la un reper cartezian ortonormat oarecare coordonatele centrului de greutate sunt $O(x_O, y_O)$:
   $$X_O = \frac{x_A + x_B + x_C + \ldots + x_N}{n} = \frac{x_{A_1} + x_{B_1} + x_{C_1} + \ldots + x_{N_1}}{n} = \ldots = \frac{x_{A_n} + x_{B_n} + x_{C_n} + \ldots + x_{N_n}}{n},$$
   $$Y_O = \frac{Y_A + Y_B + Y_C + \ldots + Y_N}{n} = \frac{Y_{A_1} + Y_{B_1} + Y_{C_1} + \ldots + Y_{N_1}}{n} = \ldots = \frac{Y_{A_n} + Y_{B_n} + Y_{C_n} + \ldots + Y_{N_n}}{n}.$$
   Observatie: Daca $O$ este originea reperului cartezian atunci $x_O = y_O = 0$, adica $O(0,0)$.
   Demonstratie: Evidenta pentru poligoanele regulate cu numar par de laturi prin simetria puncetelor fata de $O$. Iar pentru poligoanele cu numar impar chiar par de laturi cu ajutorul fizicii centrul de greutate al unui poligon este punctul unde sistemul este în echilibru.

3. Poligoanele regulate astfel obtinute sunt asemenea astfel:
   $ABCD\ldots N \sim A_2B_2C_2D_2\ldots N_2 \sim A_4B_4C_4D_4\ldots N_4 \sim \ldots \sim A_{2k}B_{2k}C_{2k}D_{2k}\ldots N_{2k}$,
   $A_1B_1C_1D_1\ldots N_1 \sim A_3B_3C_3D_3\ldots N_3 \sim A_5B_5C_5D_5\ldots N_5 \sim \ldots \sim A_{2k+1}B_{2k+1}C_{2k+1}D_{2k+1}\ldots N_{2k+1}$

Demonstratie: Poligoanele de mai sus au laturile paralele deci implicit proportionale. Sau pornind de la asemanarea triunghiurilor (teorema fundamentala a asemanarii):

$$\triangle OAB \sim \triangle ON_2A_2 \sim \triangle OM_4N_4 \sim \ldots,$$

$$\triangle ON_1A_1 \sim \triangle OM_3N_3 \sim \triangle OL_5M_5 \sim \ldots .$$

4. Daca luam $n = 6$ în ipoteza de mai sus, poligonul de 6 laturi regulat devine hexagonul regulat despre care stim ca latura este egala cu raza cercului circumscris $l = R$.

   Putem vizualiza limita sirului : $(l_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $l_n = \frac{l}{\sqrt{3}^n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ sau $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{l}{\sqrt{3}^n} = 0$ unde $l$ este lungimea hexagonului initial.

   Demonstratie: Lungimea laturii hexagonului initial o consideram $l = l_0$. Se constata ca

   $OB_1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{l\sqrt{3}}{2} = \frac{l}{\sqrt{3}} = l_1$ este lungimea hexagonului regulat $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$;

   $OF_2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{OA_1 \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{l}{\sqrt{3}^2} = l_2$ este lungimea hexagonului regulat $A_2B_2C_2D_2E_2F_2$; s.a.m.d.

   $l_n = \frac{l}{\sqrt{3}^n}$, $n \in \mathbb{N}$, este lungimea hexagonului regulat $A_nB_nC_nD_nE_nF_n$ cu demonstratie prin metoda inductiei matematice.

   Deci daca observam figura, lungimea laturii al n-lea hexagon regulat este din ce în ce mai mica, cele doua capete ale laturii se apropie. Deci avem vizualizarea limitei:

   $$\lim_{n\to\infty} \frac{l}{\sqrt{3}^n} = 0 \text{ unde } l \text{ constanta.}$$

   Limita evidenta din punctul de vedere al analizei matematice.

5. Notam $H_0$ hexagonul regulat $ABCDEF$ si $S_{H0}$ aria hexagonului regulat $ABCDEF$,

   $H_1$ hexagonul regulat $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ si $S_{H1}$ aria hexagonului regulat $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$,

   $H_2$ hexagonul regulat $A_2B_2C_2D_2E_2F_2$ si $S_{H2}$ aria hexagonului regulat $A_2B_2C_2D_2E_2F_2$,

   .

   .

   .

   $H_n$ hexagonul regulat $A_nB_nC_nD_nE_nF_n$ si $S_{Hn}$ aria hexagonului regulat $A_nB_nC_nD_nE_nF_n$.

   Vizualizarea limitei: $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} S_{H_k} = \frac{3}{2} \cdot S_{H_0}$,

   $$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} S_{H_k} = \frac{1}{2} \cdot S_{H_0}.$$

Demonstratie: Stiind ca, $S_{H0} = \frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot l^2$ si lungimile laturilor hexagoanelor regulate de la punctul precedent avem: .

Avem:

$$\sum_{k=0}^{n} S_{H_k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot\left(\frac{l}{\sqrt{3}^k}\right)^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot l^2 \cdot \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{3^k} = \frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot l^2\cdot\frac{\frac{1}{3^{n+1}}-1}{\frac{1}{3}-1} = \frac{9\sqrt{3}}{4}\cdot l^2\cdot\left(1-\frac{1}{3^{n+1}}\right).$$

Deci trecând la limita obtinem:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} S_{H_k} = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{9\sqrt{3}}{4}\cdot l^2\cdot\left(1-\frac{1}{3^{n+1}}\right)\right] = \frac{9\sqrt{3}}{4}\cdot l^2 = \frac{3}{2}\cdot S_{H_0}.$$

Pentru a doua limita avem:

$$\sum_{k=1}^{n} S_{H_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot\left(\frac{l}{\sqrt{3}^k}\right)^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot l^2 \cdot \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3^k} = \frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot l^2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{\frac{1}{3^{n}}-1}{\frac{1}{3}-1} = \frac{9\sqrt{3}}{4}\cdot l^2\cdot\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3^{n}}\right).$$

Deci trecând la limita obtinem:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} S_{H_k} = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{3\sqrt{3}}{4}\cdot l^2\cdot\left(1-\frac{1}{3^{n+1}}\right)\right] = \frac{3\sqrt{3}}{4}\cdot l^2 = \frac{1}{2}\cdot S_{H_0}.$$