Abstract

În acest articol se prezintă câteva modalităţi de obţinere a unor inegalităţi integrale pornind de la anumite proprietăţi date, presupunând că se cunosc deja inegalităţi clasice precum Cauchy-Buniakovski, Rogers- Hölder. Pe lângă procesul de recapitulare şi verificare a unor cunoştiinţe de analiză, elevii sunt stimulaţi să îşi creeze propria tehnica de descoperire prin exerciţiu.

Metode de obţinere a unor inegalităţi integrale

Florea Aurelia

Cuprins

0.1 Introducere

Procesul de predare cunoaşte mai multe etape, iar fiecare necesită metode adecvate (aşa zisa "metodă PAR").

1. Prezinta: Metode de prezentare de noi cunoştinţe elevilor sau de încurajare în a le găsi singuri, ceea ce poate implica fapte, teorii, concepte, povestiri etc.

2. Aplică: Metode care să-i oblige pe elevi să aplice noile cunoştinţe care le-au fost doar prezentate. Aceasta este singura modalitate de a te asigura că elevii formează concepte despre noul material pentru a îl înţelege, a şi-l aminti şi a-l folosi corect pe viitor.

3. Recapitulează: Metode de încurajare a elevilor să îşi amintească vechile cunoştinţe în vederea clarificării şi concentrarii asupra punctelor cheie, asigurării unei bune întelegeri, punerii în practicş şi verificării cunoştinţelor mai vechi.

Acest material pune accentul pe metode active de utilizare a informaţiilor acumulate de elevi, mai exact potrivite fazelor de aplicare şi analiză.

Metodele actuale, folosite de obicei, cum ar fi predarea/dictarea îi pot plictisi pe elevi dacă dureaza prea mult; strategiile active actuale sunt cu atât mai folositoare. Ideal ar fi ca strategia de prezentare activă să includa o activitate de "aplicare" care să fie urmată de o strategie de recapitulare activă scurtă. Astfel, toate nevoile elevilor sunt atinse într-un mod activ.

B. De ce sa folosim strategii de "prezentare" activă?

■ Toate studiile arată că învăţarea vine în urma exerciţiului, adică punând în practică ceea ce am învăţat pentru a putea, de exemplu, răspunde la întrebari. Acest lucru îi determină pe elevi sa prelucreze informaţia şi să îi confere un sens găsit de ei. Acest proces poartă denumirea de *proces constructivist.*

Studiile subliniază faptul că metodele active:

■ Creeaza o învăţare mai profundă şi o mai bună aplicare a cunoştinţelor
■ Elevii dau dovadă de o bună memorare
■ Elevii dezvoltă aptitudini de gândire mai bună
■ Sunt mai apreciate de elevi

Învăţarea activă îi determină pe elevi să-şi formeze propria lor întelegere a materialului şi propria perspectivă.

Verifică nivelul de învăţare:

■ Se poate obţine feedback asupra măsurii în care elevii înteleg materialul şi pot corecta aspectele înţelese greşit.

■ Elevii isi dezvolta propriile aptitudini de gandire si de intelegere propriuzisa a temei, exersind in acelasi timp si aptitudinile care le vor fi verificate.

Evaluarea performanţelor prin:

1. Modalităţi de evaluare a progresului elevilor
2. Sarcinile de lucru individual
3. Notarea
4. Feedback-ul

Acest articol porneşte de la o inegalitate propusă de D. M. Bătineţu-Giurgiu în [1] şi îşi propune să exemplifice modalităţi prin care elevii pot exersa şi chiar concepe în cadrul unei lecţii de analiză, câteva inegalităţi integrale. Ştim că are loc următoarea inegalitate:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\cos x}}{1+f(x)} dx \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}} \tag{1}$$

unde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ este o funcţie continuă cu proprietatea $f(x) f(-x) = 1$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

Pentru a demonstra această inegalitate vom folosi următoarea proprietate (elevii fiind astfel obişnuiţi în a-şi concepe demonstraţiile mergând pe cazuri generale):

Proprietatea 1. *Dacă f este o funcţie continuă pe $[-a, a]$, atunci*

$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = \int_{0}^{a} (f(x) + f(-x)) dx.$$

Demonstraţia este imediată dacă considerăm în integrala $\int_{-a}^{0} f(x)\, dx$ schimbarea de variabilă, $-x = t$.

Membrul stâng al inegalităţii (1) se poate astfel scrie

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\cos x}}{1+f(x)} dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sqrt{\cos x}}{1+f(x)} + \frac{\sqrt{\cos x}}{1+f(-x)}\right) dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x} \left(\frac{1+f(x)}{1+f(x)}\right) dx.$$

Utilizând inegalitatea lui Cauchy-Buniakovski avem

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x} dx \leq \left(\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx\right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Cum $\left(\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx\right)^{\frac{1}{2}} = 1$ se deduce inegalitatea (1). Cum se pot deduce şi alte inegalităţi cu ajutorul inegalităţilor clasice Cauchy-Buniakovski, Rogers-Hölder, inegalitatea mediilor?

0.2 Generalizări

O generalizare a acestei inegalităţi este imediată [3]:

Lemă 1. *Fie $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ două funcţii continue cu proprietatea $f(x) f(-x) = 1$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, g funcţie pară. Atunci*

$$\left| \int_{-s}^{s} \frac{g(x)}{1+f(x)} dx \right| \leq \sqrt{s \left(\int_{0}^{s} g(x)^2\, dx \right)}, \tag{2}$$

oricare $s \in \mathbb{R}_+$.

Demonstraţia se bazează pe faptul că

$$\int_{-s}^{s} \frac{g(x)}{1+f(x)} dx = \int_{0}^{s} g(x)\, dx.$$

Pentru $f \equiv 1$ se obţine relaţia cunoscută pentru g funcţie pară

$$\int_{-s}^{s} g(x)\, dx = 2\int_{0}^{s} g(x)\, dx.$$

Lemă 2. *În condiţiile lemei de mai sus, dacă $p > 1$ şi $q > 1$, astfel încât $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,obţinem următoarea inegalitate (în urma aplicării inegalităţii Rogers-Hölder):*

$$\left| \int_{-s}^{s} \frac{g(x)}{1+f(x)} dx \right| \leq s^{\frac{1}{q}} \left(\int_{0}^{s} g(x)^p\, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

Consecinţa 1. *Fie g o funcţie continuă şi pară pe $[-s, s]$, atunci*

$$\left| \int_{-s}^{s} \frac{g(x)\, dx}{e^{rx}+1} \right| \leq \sqrt{s \left(\int_{0}^{s} g(x)^2\, dx \right)},$$

oricare ar fi $r \in \mathbb{R}$.

Demonstraţie. Se utilizează Lema1 (şi inegalitatea Cauchy-Buniakovski) în condiţiile în care $e^{rx} \cdot e^{-rx} = 1$.

Consecinţa 2. *Dacă $a \in \mathbb{R}_{+}^{*} - \{1\}$ şi g este o funcţie continuă şi pară $[-s, s]$, atunci*

$$\left| \int_{-s}^{s} \frac{g(x)\, dx}{a^{rx}+1} \right| \leq \sqrt{s \left(\int_{0}^{s} g(x)^2\, dx \right)},$$

oricare ar fi $r \in \mathbb{R}$.

Consecinţa 3. *Dacă $a \in \mathbb{R}_{+}^{*} - \{1\}$ şi g, h sunt două funcţii continue, g pară pe $[-s, s]$, h impară. Atunci*

$$\left| \int_{-s}^{s} \frac{g(x)\, dx}{a^{h(x)}+1} \right| \leq \sqrt{s \left(\int_{0}^{s} g(x)^2\, dx \right)},$$

oricare ar fi $r \in \mathbb{R}$.

0.3 O nouă abordare

Am văzut că dacă $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sunt două funcţii continue cu proprietatea $f(x) f(-x) = 1$,oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, g funcţie pară, atunci

$$\int_{-s}^{s} \frac{g(x)}{1 + f(x)} dx = \int_{0}^{s} g(x)\, dx,$$

deci putem obţine următoarea inegalitate

$$\left| \int_{0}^{s} g(x)\, dx \right| = \left| \int_{-s}^{s} \frac{g(x)}{1 + f(x)} dx \right| \leq \left(\int_{-s}^{s} g(x)^2\, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-s}^{s} \frac{dx}{(1 + f(x))^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3)$$

Lemă 3. *Fie $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sunt două funcţii continue cu proprietatea $f(x) f(-x) = 1$,oricare ar fi $x \in \mathbb{R}, p > 1$ şi $q > 1$, astfel încât $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, g funcţie pară. Atunci obţinem următoarea inegalitate:*

$$\left| \int_{0}^{s} g(x)\, dx \right| \leq \left(\int_{-s}^{s} g(x)^p\, dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{-s}^{s} \frac{dx}{(1 + f(x))^q} \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Consecinţa 4. *Dacă $a \in \mathbb{R}_{+}^{*} - \{1\}$ şi g, h sunt două funcţii continue, g pară pe $[-s, s]$, h impară, $p > 1$ şi $q > 1$, astfel încât $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, atunci obţinem următoarea inegalitate:*

$$\left| \int_{0}^{s} g(x)\, dx \right| \leq \left(\int_{-s}^{s} g(x)^p\, dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{-s}^{s} \frac{dx}{(1 + a^{h(x)})^q} \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Demonstraţie. Cum

$$\int_{-s}^{s} \frac{g(x)}{1 + a^{h(x)}} dx = \int_{0}^{s} \left(\frac{g(x)}{1 + a^{h(x)}} + \frac{g(-x)}{1 + a^{h(-x)}} \right) dx = \int_{0}^{s} g(x)\, dx$$

în urma aplicării inegalităţii lui Rogers-Hölder, obţinem ceea ce ne-am dorit.

Consecinţa 5. *Dacă plecăm de la o măsură absolut continuă în raport cu măsura Lebesgue, g funcţie pară, pozitivă, integrabilă, $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ sunt două funcţii continue cu proprietatea $f(x) f(-x) = 1$,oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$ atunci pentru $d\mu = g(x)\, dx$ avem*

$$\int_{-a}^{a} \frac{d\mu(x)}{1 + f(x)} = \mu([0, a])$$

de unde deducem inegalitatea corespunzătoare

$$\left| \int_{-a}^{a} \frac{d\mu(x)}{1 + f(x)} \right| \leq \sqrt{a \left(\int_{0}^{a} g(x)^2\, dx \right)}.$$

0.4 Aplicaţii

1. Să se demonstreze următoarea inegalitate:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sqrt{\cos\frac{x}{2}}}{e^x+1}dx \leq \sqrt{2\pi}$$

Demonstraţie. Cum funcţia $f(x) = e^x, g(x) = \sqrt{\cos\frac{x}{2}}$ verifică condiţiile din Lema 1, vom obţine

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sqrt{\cos\frac{x}{2}}}{e^x+1}dx &= \int_0^{\pi} \sqrt{\cos\frac{x}{2}}dx \leq \\ &\leq \sqrt{\pi}\left(\int_0^{\pi} \cos\frac{x}{2}dx\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2\pi}\end{aligned}$$

2. Să se verifice:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin x^2 dx}{e^{\sin x}+1} \leq \sqrt{\pi\int_0^{\pi} \sin^2 x^2 dx}$$

Demonstraţie. Se aplică Consecinţa 1şi obţinem:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin x^2 dx}{e^{\sin x}+1} = \int_0^{\pi} \sin x^2 dx \leq \sqrt{\pi\int_0^{\pi} \sin^2 x^2 dx}$$

3. Să se demonstreze că oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$ se verifică următoarea inegalitate:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\cos x}}{e^{\sin^{2n+1} x}+1}dx \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Demonstraţie. Se aplică Consecinţa 1şi obţinem:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x}dx \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx} = \sqrt{\pi/2}$$

4. Să se demonstreze că oricare ar fi $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$ se verifică inegalitatea:

$$(\int_{-1}^{1} \frac{1}{(a^{x^3}+1)^2}dx)^{\frac{1}{2}} \geq \frac{\sqrt{10}}{6}$$

Demonstraţie.

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{(a^{x^3}+1)^2}dx = \int_0^1 x^2 dx$$
$$\leq \left(\int_{-1}^{1} x^4 dx\right)^{\frac{1}{2}} (\int_{-1}^{1} \frac{1}{(a^{x^3}+1)^2} dx)^{\frac{1}{2}}$$

de unde în urma calculării celor două integrale deducem inegalitatea dorită.

5. Să se demonstreze următoarea inegalitate:

$$\left(\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (e^{tg(x)}+1)^{-2}dx\right)^{\frac{1}{2}} \geq \frac{\int_0^{\frac{\pi}{3}} tg^2 x dx}{\left(\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} tg^4 x dx\right)^{\frac{1}{2}}}$$

Demonstraţie. Se utilizează inegalitatea (3)

$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{tg^2 x}{e^{tgx}+1}dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} tg^2 x dx \leq$$
$$\leq (\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (e^{tgx}+1)^{-2}dx)^{\frac{1}{2}} (\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} tg^4 x dx)^{\frac{1}{2}}.$$

6. Calculaţi (concursul ”Grigore Moisil”, Zalau, 1998, [5])

$$\int_{-2\pi}^{2\pi} \frac{dx}{(2+\cos x)(1+e^x)}$$

7. Să se arate că ([6])

$$\int_{-a}^{a} \frac{dx}{x^{2n+1}+b+\sqrt{b^2 x^{4n+2}}} = \frac{a}{b}.$$

Bibliografie

[1] D. M. Bătineţu-Giurgiu: *Concursul interjudeţean de matematică "Laurenţiu Duican"*, Braşov 1999, cls. a XII-a, problema 2, G. M. 7-8 /1999, pag. 286.

[2] C. P. Niculescu and L.-E. Persson, *Convex Functions and Their Applications. A Contemporary Approach,* Springer-Verlag, New York, 2006.

[3] A. Florea, *Metode de invatare activa. O noua abordare a unei inegalitati integrale*, comunicare susţinută la a XI -a Conferinţă anuală a Societăţii de Ştiinţe Matematice din România, Bucuresti 26-27 iunie 2007.

[4] D. M. Bătineţu-Giurgiu ş.a., Exerciţii şi probleme de analiză matematică pentru clasele a XI-a şi a XII-a, EDP, Buc. 1981.

[5] Gazeta Matematică, nr. 4, 1999.

[6] Gazeta Matematică, nr. 9-10, 2001.