Rezumatul Articolului cu Titlul
“Distantele Dintre Unele Puncte Remarcabile
Ale Unui Triunghi”

Intr-un triunghi oarecare ABC,folosind notatiile traditionale si produsul scalar a doi vectori,avem relatiile:

1. $OG^2 ? \frac{1}{9}?9R^2 ? a^2 ? b^2 ? c^2 ?$;
2. $OH^2 ? 9R^2 ? a^2 ? b^2 ? c^2$
3. $GH^2 ? \frac{4}{9}?9R^2 ? a^2 ? b^2 ? c^2 ?$;
4. $OI^2 ? R(R ? 2r)$ -relatia lui Euler;
5. G este intre O si H,la $\frac{1}{3}$ de O si la $\frac{2}{3}$ de H. 

6. $HI^2 ? 4R^2 ? \frac{1}{2p}?abc ? a^3 ? b^3 ? c^3 ?? 4R^2 ? \frac{1}{2p}?4RS ? a^3 ? b^3 ? c^3 ?$;
7. $GI^2 ? \frac{1}{18p^2}??a^2b^2 ? b^2c^2 ? c^2a^2 ?? p?a^3 ? b^3 ?c^3 ?? ?a^4 ? b^4 ? c^4 ?? 5pabc?$ sau:

   $GI^2 ? \frac{1}{18p^2}?16S^2 ? p?a^3 ? b^3 ? c^3 ?? 5pabc?$ sau: $GI^2 ? \frac{1}{18p^2}?16S^2 ? p?a^3 ? b^3 ? c^3 ?? 20pRS?$ unde

   $16S^2 ? 2(a^2b^2 ? b^2c^2 ? c^2a^2) ? a^4 ? b^4 ? c^4$ si $R ? \frac{abc}{4S}, p ? \frac{a ? b ? c}{2}$.
8. $a^2 ? b^2 ? c^2 ? 9R^2$;
9. R ? 2R
10. abc+$a^3 ? b^3 ? c^3 ? 8pR^2$;
11. $2?a^2b^2 ? b^2c^2 ? c^2a^2 ?? a^4 ? b^4 ? c^4 ? p?a^3 ? b^3 ? c^3 ? ? 5pabc$;
12. $16S^2 ? p?abc ? a^3 ? b^3 ? c^3 ?$;
13. $16S^2 ? p$(20RS-$a^3 ? b^3 ? c^3$)
14. Daca ?ABC este echilateral,atunci R=2r; S=$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$; p=$\frac{3a}{2}$ plus o serie de relatii ce rezulta prin inlocuirea lui b si c cu a.

“Distantele dintre unele puncte remarcabile ale unui triunghi”

Consideram un triunghi ABC in care notam in mod traditional ||AB||=c;||BC||=a; ||CA||=b, r lungimea razei cercului inscris,R lungimea razei cercului circumscris,S aria triunghiului,G centrul de greutate,H ortocentrul,I centrul cercului inscris,iar O centrul cercului circumscris triunghiului ABC.Avand patru puncte distincte G,H,I si O rezulta un numar de $C_4^2 ? \frac{4!}{2!(4 ? 2)!} ? 6$ distante distincte si anume||OG||;||OH||;||GH||; ||OI||;||HI||;||GI||.

In cadrul acestui articol imi propun aflarea acestor distante precum si a unor inegalitati intre elementele unui triunghi,care rezulta din aceste sase distante. Rezultatele la care am ajuns sunt:

1. Punctele O,G,H sunt coliniare,G este intre O si H situat la $\frac{1}{3}$ de O si la $\frac{2}{3}$ de H

2. $\|OG^2\| ? \frac{1}{9}(9R^2 ? a^2 ? b^2 ? c^2)$;
3. $\|OH\|^2 ? 9R^2 ? a^2 ? b^2 ? c^2$;
4. $\|OG^2\| = \frac{4}{9} ? 9R^2 ? a^2 ? b^2 ? c^2 ?$;
5. $\|OI\|^2 ? R(R ? 2r)$;
6. $\|HI\|^2 ? 4R^2 ? \frac{1}{4p} ? abc ? a^3 ? b^3 ? c^3 ?$;
7. $\|GI\|^2 ? \frac{1}{18p^2} ? 2 ? a^2b^2 ? b^2c^2 ? c^2a^2 ? ? p ? a^3 ? b^3 ? c^3 ? ? ? a^4 ? b^4 ? c^4 ? ? 5pabc ? ?$

   $? \frac{1}{18p^2} ? 16S^2 ? p ? a^3 ? b^3 ? c^3 ? 5abc ? ? \frac{1}{18p^2} ? 16S^2 ? p ? a^3 ? b^3 ? c^3 ? 20RS ?$.

Inegalitatile ce rezulta din aceste distante sunt:

1.$a^2 ? b^2 ? c^2 ? 9R^2$
2.R ? 2r
3.abc+$a^3 ? b^3 ? c^3 ? 8pR^2$
4.$2 ? a^2b^2 ? b^2c^2 ? c^2a^2 ? ? p ? a^3 ? b^3 ? c^3 ? ? a^4 ? b^4 ? c^4 ? 5pabc$
5.p $? a^3 ? b^3 ? c^3 ? ? 5pabc ? 16S^2$;inegalitati ce au loc in orice triunghi ABC,unde

$16S^2 ? 2 ? a^2b^2 ? b^2c^2 ? c^2a^2 ? ? a^4 ? b^4 ? c^4$;

Daca triunghiul ABC este echilateral cu lungimea laturii a, atunci avem urmatoarele relatii:

1. S=$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$
2. abc=a^3;
3. R=2r;
4. p=$\frac{3a}{2}$
5. R=$\frac{a\sqrt{3}}{3}$
6. r=$\frac{R}{2}$
7. OG=OH=GH=OI=HI=GI=O.

Fac observatia ca p=$\frac{a ? b ? c}{2}$ (semiperimetrul),

$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, ||OA||=||OB||=||OC||=R si $\left(\widehat{\vec{OA},\vec{OB}}\right)=R^2\cdot\frac{2R^2-c^2}{2R^2}=\frac{2R^2-c^2}{R^2}$;

r=$\frac{S}{p}$; $R=\frac{abc}{4S}$; $(abc=4RS)$; $\vec{OG}=\frac{1}{3}(\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC})$ (1)

$\vec{OI}=\frac{1}{2p}(a\cdot\vec{OA}+b\cdot\vec{OB}+c\cdot\vec{OC})$ (2); $\vec{HG}=\frac{1}{3}(\vec{HA}+\vec{HB}+\vec{HC})$ (3); $\vec{OH}=\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}$ (4);

$2\vec{HO}=\vec{HA}+\vec{HB}+\vec{HC}$ (5)

Aceste relatii se afla si unele manuale scolare.

Din (1) si (4) avem: $\vec{OG}=\frac{1}{3}\vec{OH}$. Din (3) si (5) avem: $2\vec{HO}=3\vec{HG}$. Deci punctele O,G,H sunt coliniare.

Calculul Distantelor Propuse

1. $||\vec{OG}||^2=\vec{OG}^2=\vec{OG}\cdot\vec{OG}=\left(\frac{1}{3}(\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC})\right)^2=\frac{1}{9}(\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC})^2=$

$=\frac{1}{9}(\vec{OA}^2+\vec{OB}^2+\vec{OC}^2+2\vec{OA}\cdot\vec{OB}+2\vec{OA}\cdot\vec{OC}+2\vec{OB}\cdot\vec{OC})=$

$=\frac{1}{9}[R^2+R^2+R^2+2\cdot||\vec{OA}||\cdot||\vec{OB}||\cdot\cos\left(\widehat{\vec{OA},\vec{OB}}\right)+2\cdot||\vec{OA}||\cdot||\vec{OC}||\cdot$

$\cos\left(\widehat{\vec{OA},\vec{OC}}\right)+2\cdot||\vec{OB}||\cdot||\vec{OC}||\cdot\cos\left(\widehat{\vec{OB},\vec{OC}}\right)]=$

$=\frac{1}{9}\left(3R^2+2R^2\cdot\frac{2R^2-c^2}{2R^2}+2R^2\cdot\frac{2R^2-b^2}{2R^2}+2R^2\cdot\frac{2R^2-a^2}{2R^2}\right)=\frac{1}{9}(9R^2-a^2-b^2-c^2)$;

2. $\vec{OH}=3\vec{OG}\Rightarrow\vec{OH}^2=9\vec{OG}^2\Rightarrow||\vec{OH}||^2=9R^2-a^2-b^2-c^2$;

3. $\vec{GH}=2\vec{OG}\Rightarrow\vec{GH}^2=4\vec{OG}^2\Rightarrow||\vec{GH}||^2=\frac{4}{9}(9R^2-a^2-b^2-c^2)$;

4. $\vec{OI}=\frac{1}{a+b+c}(a\cdot\vec{OA}+b\cdot\vec{OB}+c\cdot\vec{OC})=\frac{1}{2p}(a\cdot\vec{OA}+b\cdot\vec{OB}+c\cdot\vec{OC})\Rightarrow$

$||\vec{OI}||^2=\frac{1}{4p^2}(a^2\cdot\vec{OA}^2+b^2\cdot\vec{OB}^2+c^2\cdot\vec{OC}^2+2ab\cdot\vec{OA}\cdot\vec{OB}+2ac\cdot\vec{OA}\cdot\vec{OC}+2bc\cdot\vec{OB}\cdot\vec{OC})=$

$=\frac{1}{4p^2}\left(a^2\cdot R^2+b^2\cdot R^2+c^2\cdot R^2+2abR^2\cdot\frac{2R^2-c^2}{2R^2}+2acR^2\cdot\frac{2R^2-b^2}{2R^2}+2bcR^2\cdot\frac{2R^2-a^2}{2R^2}\right)=$

$=\frac{1}{4p^2}(a^2R^2+b^2R^2+c^2R^2+2abR^2+2acR^2+2bcR^2-abc^2-ab^2c-a^2bc)=$

$=\frac{1}{4p^2}[R^2(a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc)-abc(a+b+c)]=$

$$= \frac{1}{4p^2}\left[R^2(a+b+c)^2 - 2p\underbrace{abc}_{4RS}\right] = \frac{1}{4p^2}\left(R^2\cdot 4p^2 - 8pRS\right) = \frac{4Rp}{4p^2}\left(Rp - 2\underbrace{S}_{r.p}\right) =$$

$$= \frac{R}{p}(Rp - 2rp) = \frac{R}{p}\,p(R - 2r) = R(R - r).$$

5. $\overrightarrow{HI} = \overrightarrow{OI} - \overrightarrow{OH} = \frac{1}{a+b+c}\left(a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} + c\overrightarrow{OC}\right) - \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \|HI\|^2 = \frac{1}{4p^2}\Big[(b+c)^2\|OA\|^2 + (a+c)^2\|OB\|^2 + (a+b)^2\|OC\|^2 + 2(b+c)(a+c)\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$$

$$+ 2(b+c)(a+b)\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC} + 2(a+c)(a+b)\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}\Big] =$$

$$= \frac{1}{4p^2}\Big[(b+c)^2R^2 + (a+c)^2R^2 + (a+b)^2R^2 + 2(b+c)(a+c)R^2\cdot\frac{2R^2 - c^2}{2R^2}$$

$$+ 2(b+c)(a+b)R^2\cdot\frac{2R^2 - b^2}{2R^2} + 2(a+c)(a+b)R^2\cdot\frac{2R^2 - a^2}{2R^2}\Big] =$$

$$= \frac{1}{4p^2}\Big[(b+c)^2R^2 + (a+c)^2R^2 + (a+b)^2R^2 + (b+c)(a+c)(2R^2 - c^2) +$$

$$+ (b+c)(a+b)(2R^2 - b^2) + (a+c)(a+b)(2R^2 - a^2)\Big] =$$

$$= \frac{1}{4p^2}\Big[R^2(b+c+a+c+a+b)^2 - (b+c)(a+b)c^2 - (b+c)(a+b)b^2 - (a+c)(a+b)a^2\Big] =$$

$$= \frac{1}{4p^2}\Big[R^2(4p)^2 - (abc^2 + bc^3 + ac^3 + c^4 + ab^3 + b^4 + ab^2c + b^3c + a^4 + a^3b + a^3c + a^2bc)\Big] =$$

$$= \frac{1}{4p^2}R^2\cdot 16p^2 - \frac{1}{4p^2}\Big[a^4 + b^4 + c^4 + abc(a+b+c) + c^3(a+b) + b^3(a+c) + a^3(b+c)\Big] =$$

$$= 4R^2 - \frac{1}{4p^2}\Big[a^4 + b^4 + c^4 + abc\cdot 2p + c^3(2p - c) + b^3(2p - b) + a^3(2p - a)\Big] =$$

$$= 4R^2 - \frac{1}{4p^2}\Big[a^4 + b^4 + c^4 + 2pabc + 2c^3p - c^4 + 2b^3p - b^4 + 2a^3p - a^4\Big] =$$

$$= 4R^2 - \frac{1}{4p^2}\Big[2p(abc + a^3 + b^3 + c^3)\Big] = 4R^2 - \frac{1}{2p}(abc + a^3 + b^3 + c^3).$$

6. $\overrightarrow{GI} = \overrightarrow{OI} - \overrightarrow{OG} = \frac{1}{a+b+c}\left(a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} + c\overrightarrow{OC}\right) - \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right) =$

$$= \frac{2a - b - c}{6p}\overrightarrow{OA} + \frac{2b - a - c}{6p}\overrightarrow{OB} + \frac{2c - a - b}{6p}\overrightarrow{OC} =$$

$$= \frac{1}{6p}\Big[(2a - b - c)\overrightarrow{OA} + (2b - a - c)\overrightarrow{OB} + (2c - a - b)\overrightarrow{OC}\Big] \Rightarrow$$

$$\|GI\|^2 = \frac{1}{36p^2}\Big[(2a - b - c)^2R^2 + (2b - a - c)^2R^2 + (2c - a - b)^2R^2 +$$

$$+ 2(2a - b - c)(2b - a - c)R^2\cdot\frac{2R^2 - c^2}{2R^2} + 2(2a - b - c)(2c - a - b)R^2\cdot\frac{2R^2 - b^2}{2R^2} +$$

$$+ 2(2b - a - c)(2c - a - b)R^2\cdot\frac{2R^2 - a^2}{2R^2}\Big] =$$

$$? \frac{1}{36p^2} ?R^2 ?2a ? b ? c ? 2b ? a ? c ? 2c ? b ? a?^2 ? ?2a ? b ? c??2b ? a ? c?c^2 ?$$

$$? ?2a ? b ? c??2c ? a ? b?b^2 ? ?2b ? a ? c??2c ? a ? b?a^2 ?? $$

$$? \frac{1}{36p^2} ??4abc^2 ? 2a^2c^2 ? 2ac^3 ? 2b^2c^2 ? abc^2 ? bc^3 ? 2bc^3 ? ac^3 ? c^4 ? 4ab^2c ?$$

$$?2a^2b^2 ? 2ab^3 ? 2b^3c ? ab^3 ? b^4 ? 2b^2c^2 ? ab^2c ? b^3c ? 4a^2bc ? 2a^3b ?$$

$$?2a^2b^2 ? 2a^3c ? a^4 ? a^3b ? 2a^2c^2 ? a^3c ? a^2bc? ? \frac{1}{36p^2} ??5abc ?a ? b ? c??$$

$$?4?a^2b^2 ? a^2c^2 ? b^2c^2 ?? ac^3 ? bc^3 ? ab^3 ? b^3c ? a^3b ? a^3c ? a^4 ? b^4 ? c^4 ??$$

$$? \frac{1}{36p^2} ??5abc ?2p ? 4?a^2b^2 ? a^2c^2 ? b^2c^2 ?? c^3 ?a ? b?? b^3 ?a ? c?? a^3 ?b ? c?? a^4 ? b^4 ? c^4 ??$$

$$? \frac{1}{36p^2} ??5abc ?2p ? 4?a^2b^2 ? a^2c^2 ? b^2c^2 ?? c^3 ?2p ? c?? b^3 ?2p ? b?? a^3 ?2p ? a?? a^4 ? b^4 ? c^4 ??$$

$$? \frac{1}{36p^2} ??10abcp ? 4?a^2b^2 ? b^2c^2 ? c^2a^2 ?? 2p ?a^3 ? b^3 ? c^3 ?? 2?a^4 ? b^4 ? c^4 ???$$

$$? \frac{1}{18p^2} ?2?a^2b^2 ? b^2c^2 ? c^2a^2 ?? p?a^3 ? b^3 ? c^3 ?? ?a^4 ? b^4 ? c^4 ?? 5pabc?.$$

Concluzii:

1. $OG^2 ? \frac{1}{9}?9R^2 ? a^2 ? b^2 ? c^2 ?;$
2. $OH^2 ? 9R^2 ? a^2 ? b^2 ? c^2;$
3. $GH^2 ? \frac{4}{9}?9R^2 ? a^2 ? b^2 ? c^2 ?;$
4. $OI^2 ? R?R ? 2r?$-relatia lui Euler;

5. G este intre O si H la $\frac{1}{3}$ de H si la $\frac{2}{3}$ de H.
6. $HI^2 ? 4R^2 ? \frac{1}{2p}?abc ? a^3 ? b^3 ? c^3 ?;$
7. $GI^2 ? \frac{1}{18p^2} ?2?a^2b^2 ? b^2c^2 ? c^2a^2 ?? p?a^3 ? b^3 ? c^3 ?? ?a^4 ? b^4 ? c^4 ?? 5pabc?$ sau:

   $GI^2 ? \frac{1}{18p^2} ?16S^2 ? p?a^3 ? b^3 ? c^3 ?? 5pabc?$ sau: $GI^2 ? \frac{1}{18p^2} ?16S^2 ? p?a^3 ? b^3 ? c^3 ?? 20pRS?$

   unde: $16S^2 ? 2?a^2b^2 ? b^2c^2 ? c^2a^2 ?? a^4 ? b^4 ? c^4$ si $R ? \frac{abc}{4S}$.

<u>Inegalitati intr-un triunghi oarecare:</u>

1. $a^2 ? b^2 ? c^2 ? 9R^2$
2. R ? 2r
3. abc+$a^3 ? b^3 ? c^3 ? 8pR^2$
4. $2(a^2b^2 ? b^2c^2 ? c^2a^2) ? a^4 ? b^4 ? c^4 ? p(a^3 ? b^3 ? c^3) ? 5pabc$
5. $16S^2 ? p(5abc ? a^3 ? b^3 ? c^3)$
6. $16S^2 ? p(20RS ? a^3 ? b^3 ? c^3)$.